Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт лазерной физики
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Коваленко Дмитрий Валериевич

Динамическая спектроскопия сверхузких нелинейных резонансов в бихроматических лазерных полях

Специальность 1.3.19 – Лазерная физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Юдин Валерий Иванович

Новосибирск – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Огромный рывок в научно-техническом прогрессе за последние несколько десятилетий в значительной мере обусловлен внедрением лазеров и лазерных технологий в различных областях науки, техники и промышленности. Особое место в этом процессе занимает спектроскопия резонансных атомных сред. Спектроскопические измерения позволяют понять строение вещества на молекулярном, атомном и субатомном уровнях, проверить основы квантовой физики и теории относительности. Методы, разработанные в спектроскопии, находят важные применения в современной физике и метрологии при создании прецизионных и компактных устройств, для проведения различных измерений (например, фундаментальных констант, абсолютных частот атомных переходов). Многочисленные успехи в данной области во многом обязаны теоретическому сопровождению и интерпретации экспериментальных исследований. В этом контексте первостепенную значимость приобретают формулировка математических уравнений и поиск их решений, адекватно описывающих физическую картину для исследуемых задач. Для атомных сред формализм матрицы плотности [1, 2] является наиболее распространенным подходом, описывающим взаимодействие атомов с электромагнитным полем и различные процессы релаксации (спонтанной, столкновительной, пролетной и пр.). При этом особое значение имеет так называемое стационарное состояние, возникающее при взаимодействии квантовой системы со стационарными внешними полями. Это состояние играет ключевую роль при теоретическом описании многих задач в спектроскопии и лазерной физике [3–5].

В последние годы в спектроскопических исследованиях все большую значимость приобретают устройства, в которых различные параметры электромагнитного поля имеют периодическую модуляцию. Прежде всего это так называемые частотные гребенки, образованные периодической импульсной модуляцией лазерного излучения. Такие источники излучения сейчас активно используются в современных стандартах частоты для частотных измерений [6, 7].

Также широко используется периодическая фазовая (частотная) и амплитудная модуляция лазерного излучения для различных задач и приложений (включая атомные часы и магнитометры) [8–13]. Другие перспективные и интересные направления атомных часов и магнитометров связаны с периодически модулированной поляризацией лазерного поля [14–20]. Во всех вышеприведенных примерах при их теоретическом описании стандартная концепция атомного стационарного состояния в общем случае уже неприменима именно в силу регулярной временной модуляции параметров поля.

В современной лазерной спектроскопии большой интерес вызывают нелинейные интерференционные эффекты, основанные на атомной когерентности. Примером таких эффектов являются резонансы электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭИП) [21, 22] и абсорбции (ЭИА) [23]. Одним из вариантов реализации ЭИП являются резонансы когерентного пленения населенности (КПН) [24–27], которые обусловлены наличием так называемого темного (непоглощающее свет) состояния при взаимодействии с когерентным бихроматическим полем. При взаимодействии с когерентным бихроматическим полем атомы переходят в так называемое темное (непоглощающее свет) состояние. Формирование такого КПН-резонанса происходит, когда разность оптических частот поля варьируется вблизи сверхтонкого расщепления основного состояния, что приводит к появлению узкого провала (пика) в сигнале поглощения (пропускания). В свою очередь, одной из причин резонанса ЭИА (обратного по знаку резонансу ЭИП) является формирование анизотропии в возбужденном состоянии атома и её спонтанный перенос в основное состояние [28]. В частности, при разрушении этой анизотропии, например, при столкновениях рабочих атомов с атомами буферного газа, резонанс ЭИА переходит в резонанс обратного знака – ЭИП. Главной особенностью таких резонансов является их ширина, которая может быть намного меньше естественной и достигать сотен и даже единиц герц [29–31]. Благодаря этому они находят множество значимых приложений в области нелинейной оптики [32, 33], оптических коммуникаций [34], а также широкое

применение в квантовой метрологии [35–37] при разработке атомных часов (стандартов частоты) и магнитометров.

Успехи в создании атомных часов привели к многочисленным достижениям в различных областях науки и техники: это глобальные навигационные спутниковые системы, высокоскоростные телекоммуникации, защищенные линии связи, релятивистская геодезия, проверка фундаментальных физических теорий и т.д. [38–50]. В атомных часах (стандартах частоты и времени) стабилизация частоты генератора осуществляется путем ее «привязывания» к частоте атомного перехода. При совпадении частоты зондирующего (пробного) поля с частотой атомного перехода в отклике (например, сигнале поглощения, пропускания или люминесценции) возникает резонанс. Этот резонанс используется для организации обратной связи и стабилизации частоты генератора.

Широко востребованы пассивные атомные часы микроволнового диапазона с газовой оптической ячейкой, в которых в качестве репера для стабилизации частоты используется квантовый переход между компонентами сверхтонкой структуры основного состояния атомов щелочных металлов. В этой области большой интерес представляют атомные часы, основанные на эффекте КПН. Главными преимуществами КПН-часов являются компактность и малое энергопотребление благодаря применению полностью оптической схемы возбуждения радиочастотного перехода без использования микроволнового резонатора в сочетании с достаточно высокими метрологическими характеристиками [51–54].

Развитие атомных часов приводит к разработке новых спектроскопических методов. В частности, возрастает интерес не только к стандартным схемам стабилизации, в которых для формирования сигнала ошибки используется относительно медленная гармоническая модуляция, но и к режимам стабилизации, использующим динамический отклик квантовой системы. Например, стандарт частоты, основанный на переходном процессе в спектроскопическом сигнале с частотно-ступенчатой модуляцией, был предложен и реализован в работах [55, 56].

Основной целью исследований, посвященных атомным часам, является повышение стабильности частоты, характеризующей случайные изменения эталонной частоты во времени. Форма линии спектроскопического сигнала и сдвиг резонансной частоты являются ключевыми физическими параметрами, определяющими метрологические характеристики квантовых сенсоров на основе КПН-резонансов. Например, на форму линии и сдвиг темного резонанса могут оказывать влияние движение атомов и столкновения со стенками газовой ячейки [57–60]. В работе [61] показано, что в общем случае форма линии может быть промоделирована в виде суммы симметричного (лоренцевского) и антисимметричного (дисперсионного) контуров. Антисимметричный вклад приводит к асимметрии резонанса и возникает при условии, что однофотонная отстройка отлична от нуля и при этом амплитуды световых полей не равны друг другу. Такая асимметрия является дополнительным источником сдвига нуля сигнала ошибки [62–66] и может оказывать существенное негативное влияние на точность и долговременную стабильность частоты КПН-часов. Кроме того, форма линии зависит от пространственного профиля интенсивности излучения. Например, в работе [67] рассмотрено влияние гауссова поперечного профиля поля на резонансный контур. Было продемонстрировано, что в этом случае зависимости ширины и амплитуды КПН-резонанса от мощности существенно отличаются от ситуации, когда интенсивность излучения однородна по сечению пучка. Однако в работе [67] не учитывался полевой (штарковский) сдвиг, который также является неоднородным по сечению светового пучка.

В статьях [68–75] показано, что наклон линейного участка сигнала ошибки существенно зависит от параметров гармонической частотной модуляции (индекса и частоты модуляции), используемой в системах стабилизации. Данный наклон является одним из основных параметров, определяющих кратковременную стабильность атомных часов [39]. Поэтому важной задачей является максимизация наклона. В частности, в работах [69, 70, 73, 75] показано, что существует некий оптимум параметров модуляции, при котором наклон максимален. Однако детальное рассмотрение этого вопроса в спектроскопии КПН-резонансов, которое

требует нахождения динамического решения для матрицы плотности, ранее не проводилось.

Другим основным фактором, ограничивающим долговременную стабильность КПН-часов, является полевой (штарковский) сдвиг частоты реперного перехода, который возникает при взаимодействии атомов с возбуждающим резонанс лазерным полем. Причем величина этого сдвига случайным образом меняется во времени из-за неконтролируемых вариаций параметров лазерного излучения и окружающей среды. Поэтому для достижения высоких метрологических характеристик необходимым условием является подавление полевого сдвига и его флуктуаций. Для решения этой важной проблемы были предложены различные методы в спектроскопии непрерывного типа [76–85]. В частности, метод автокомпенсации полевого сдвига [82] основан на спектроскопии реперного резонанса при двух различных значениях интенсивности лазерного излучения. При этом к частоте локального осциллятора добавляется и стабилизируется искусственный анти-сдвиг, пропорциональный интенсивности пробного поля. Метод автокомпенсации позволяет подавить линейный вклад в зависимости полевого сдвига от мощности излучения. Однако, в случае нелинейного закона этой зависимости имеет место остаточный сдвиг частоты, который ухудшает долговременную стабильность частоты. Поэтому важной задачей является детальное исследование причин, приводящих к нелинейному характеру зависимости полевого сдвига от мощности излучения, и определение условий для минимизации этих нелинейных вкладов.

Проблема полевого сдвига может быть решена также с помощью рамсеевской спектроскопии [86], включающей её различные обобщения и модификации. В отличие от спектроскопии непрерывного типа, рамсеевская спектроскопия имеет большое количество дополнительных степеней свободы, связанных с широким спектром параметров, которыми можно точно управлять: длительность рамсеевских импульсов, время свободной эволюции (темное время), фазовая структура рамсеевских импульсов (например, использование композитных импульсов), многообразие рамсеевских последовательностей (например,

использование двух и более рамсеевских импульсов), различные варианты построения сигнала ошибки и т.д.

Например, одна из модифицированных рамсеевских схем для подавления полевых сдвигов в атомных часах теоретически описана в статье [87], в которой предложено использование импульсов различной длительности, при этом второй импульс является композитным (т.е. часть составного импульса имеет сдвинутую на π фазу). Данная «гипер-рамсеевская» схема была успешно реализована в оптических часах на основе октупольного перехода в ионе иттербия Yb^+ [88, 89], где продемонстрировала существенное (на 4 порядка) подавление полевого сдвига и значительное уменьшение чувствительности к флуктуациям интенсивности пробного поля. В дальнейших вариантах развития гиперрамсеевского подхода использовались другие различные способы формирования сигнала ошибки [90–94].

Относительно недавно, были разработаны методы подавления полевых сдвигов такие как метод автобалансной рамсеевской спектроскопии (АБРС) [95], его обобщение (ОАБРС) [96] и метод комбинированного сигнала ошибки (КСО) [97]. Данные методы не страдают от эффектов релаксации в атомной среде, импульсных флуктуаций, зависящих от времени, и других неидеальностей процедуры опроса атомов. Они основаны на возбуждении атомов двумя рамсеевскими последовательностями с разными временами свободной эволюции (темные времена). ОАБРС использует две петли обратной связи, одна из которых служит для регулировки частоты гетеродина, а другая – для управления некоторым сопутствующим хорошо контролируемым параметром, связанным с рамсеевскими импульсами. При одновременной стабилизации частоты гетеродина и сопутствующего параметра полевой сдвиг будет подавлен (полностью в идеальном случае). В [95] была предложена и реализована схема стабилизации частоты, в которой в качестве сопутствующего параметра используется дополнительный сдвиг фазы поля во время действия второго импульса Рамсея. В теоретической работе [96] было показано, что существуют и другие альтернативы в выборе сопутствующего параметра. В отличие от метода ОАБРС, протокол КСО [97] использует только одну петлю обратной связи. В этом подходе сигнал ошибки для

стабилизации частоты формируется путем вычитания с соответствующим калибровочным коэффициентом двух обычных сигналов ошибки для каждой рамсеевской последовательности. Благодаря методу АБРС КПН-часы с цезиевой паровой ячейкой продемонстрировали стабильность на уровне $6 \cdot 10^{-15}$ за время усреднения 2000 секунд [98]. Методы ОАБРС и КСО были экспериментально реализованы в работах [99, 100] для лазерно-охлажденных атомов рубидия, где полевой сдвиг был подавлен более, чем на порядок.

Тем не менее, теоретическое исследование возможности реализации методов ОАБРС и КСО для подавления полевых сдвигов в КПН-часах ранее не проводилось. В первоначальных работах [96, 97] теоретический анализ проводился в рамках двухуровневой атомной системы, которая применима только к оптическим часам. Однако физические процессы при одновременном резонансном взаимодействии когерентного полихроматического поля с несколькими переходами в многоуровневом атоме существенно отличаются от возбуждения одного оптического перехода монохроматическим полем. Следовательно, автоматическое распространение методов ОАБРС и КСО на КПН-резонансы не является очевидным. Чтобы оправдать применимость данных методов к КПН-часам даже в простейшем случае, необходимо исследовать трехуровневую Λ-систему, взаимодействующую с рамсеевскими импульсами когерентного бихроматического (двухчастотного) поля.

Кроме исследований параметров сверхузких резонансов (амплитуды, ширины, формы линии, сдвига) важным является также вопрос об их знаке, который влияет на групповую скорость волновых пакетов и поглощение лазерного поля в атомной среде. Данная проблема исследовалась и ранее различными авторами. В настоящее время, благодаря различным экспериментальным [23, 101, 102] и теоретическим [28, 103–107] исследованиям сложилась следующая классификация циклических дипольных переходов атомов по типу резонанса (ЭИП или ЭИА) в режиме слабого насыщения атомного перехода. “Темными” являются переходы типа $F_g = F \to F_e = F$ и $F_g = F \to F_e = F - 1$ (где F_g и F_e есть полные угловые моменты атома в основном и возбужденном состояниях, соответственно),

на которых наблюдаются резонансы ЭИП. В свою очередь, “яркие” переходы – это переходы типа $F_g = F \rightarrow F_e = F + 1$, на которых формируются ЭИА. В частности, в работе [107] эта классификация была теоретически обоснована в рамках теории возмущений (до третьей поправки по полю включительно) для слабого бихроматического поля, образованного двумя сонаправленными волнами с произвольными эллиптическими поляризациями. Тем не менее, обобщение данной классификации для произвольных интенсивности и эллиптической поляризации поля вне рамок теории возмущений ранее не проводилось.

Решению перечисленных проблем посвящена настоящая диссертационная работа, **цель** которой заключается в *теоретическом исследовании характеристик нелинейных сверхузких резонансов в условиях нестационарного возбуждения.* Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Верификация классификации замкнутых дипольных переходов по отношению к направлению сверхузкого резонанса (ЭИА или ЭИП) в бихроматическом лазерном поле с произвольными эллиптическими поляризациями и произвольными интенсивностями частотных компонент.

2. Исследование динамического режима формирования резонанса КПН и определение оптимальных параметров гармонической частотной модуляции двухфотонной отстройки, при которых наклон линейного участка сигнала ошибки в центре линии имеет максимальную величину.

3. Исследование полевого сдвига резонанса КПН с учётом пространственной неоднородности поперечного профиля светового пучка.

4. Исследование для резонансов КПН методов подавления полевого сдвига, основанных на протоколах обобщенной автобалансной рамсеевской спектроскопии и комбинированного сигнала ошибки.

Научная новизна диссертационной работы:

1) Для установленной ранее классификации (в рамках теории возмущений) замкнутых дипольных переходов по типу сверхузкого резонанса проведено

теоретическое обобщение для произвольных интенсивностей и эллиптических поляризаций частотных компонент бихроматического лазерного поля.

2) Впервые теоретически исследовано динамическое возбуждение резонанса КПН в режиме Паунда-Древера-Холла, когда частота модуляции двух-фотонной отстройки намного превышает ширину стационарного темного резонанса.

3) Впервые показано, что пространственно-неоднородный профиль светового пучка приводит к нелинейным вкладам в зависимость полевого сдвига резонанса КПН от мощности лазерного поля.

4) Впервые теоретически доказана возможность подавления полевого сдвига КПН-резонансов методами обобщенной автобалансной рамсеевской спектроскопии и комбинированного сигнала ошибки.

Практическая значимость работы:

Полученные в настоящей диссертации теоретические результаты позволят улучшить метрологические характеристики атомных часов и магнитометров, основанных на эффекте КПН.

Методология и методы исследования:

Теоретическое исследование проводилось в рамках формализма атомной матрицы плотности. Поляризационный аспект взаимодействия атомов с полем учитывался с помощью квантовой теории углового момента [108], а релаксация и декогерентизация атомных состояний – константами затухания, которые соответствуют различным релаксационным процессам (спонтанный распад возбужденного состояния, столкновение с атомами буферного газа, пролетные эффекты и т.д.). В качестве исследуемого сигнала рассматривается поглощение лазерного поля. Используются приближения вращающейся волны и оптически тонкой среды. Для исследования различных спектроскопических сигналов применялись метод расчета «динамического стационарного состояния» [109], который позволяет с высокой точностью находить периодическое решение для матрицы плотности вне рамок Фурье-анализа и независимо от начальных условий,

а также метод матричных цепных дробей. Для аналитических и численных вычислений использовались математические пакеты Wolfram Mathematica и Matlab.

Текст диссертации состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 104 страницах, включающих в себя 35 рисунков и список цитируемой литературы из 132 наименований.

В **Главе 1** излагается алгоритм расчета матрицы плотности для атомных сред в произвольных периодически модулированных полях без использования Фурье-анализа. Данный алгоритм основывается на обобщении концепции стационарного состояния атомов на случай произвольной периодической модуляции внешнего воздействия. Помимо этого, описывается метод матричных цепных дробей, позволяющий рассчитывать Фурье-гармоники спектроскопического сигнала, возбуждаемого в квантовой системе лазерным полем с гармонической временной модуляцией параметров поля.

В **Главе 2** рассматривается возбуждение сильным двухчастотным полем резонансов ЭИП и ЭИА на вырожденном оптическом замкнутом переходе $F_g \to F_e$ для различных значений полных угловых моментов основного (F_g) и возбужденного (F_e) состояний атомарного газа. Световое поле имеет конфигурацию двух сонаправленных волн с произвольными эллиптическими поляризациями. Показано, что данную задачу можно свести к уравнениям на матрицу плотности с коэффициентами, периодически зависящими от времени. Применяя метод матричных цепных дробей, подробно описанный в первой главе настоящей диссертации, была рассчитана нулевая гармоника спектроскопического сигнала для различных параметров светового поля и угловых моментов F_g и F_e. Показано, что процесс спонтанного переноса анизотропии из возбужденного состояния в основное определяет формирование резонанса ЭИА на переходе $F_g = F \to F_e = F + 1$. Полученные результаты обобщают установленную ранее в рамках теории возмущений классификацию переходов на “яркие”

$(F_g = F \to F_e = F + 1)$ и “темные” $(F_g = F \to F_e = F$ и $F_g = F \to F_e = F - 1)$ по отношению к типу сверхузкого резонанса.

В **Главе 3** рассматривается случай стабилизации частоты часового сигнала по КПН-резонансу в рамках задачи взаимодействия трехуровневой Λ-системы атомов с бихроматическим частотно-модулированным полем. В процессе решения задачи при использовании вышеописанных алгоритмов был проведен численный расчет сигнала ошибки в широком диапазоне параметров модуляции и определены оптимальные режимы стабилизации, при которых наклон имеет максимальное значение. Также было проведено исследование возбуждения КПН-резонанса в режиме Паунда-Древера-Холла.

В **Главе 4** теоретически исследуется влияние гауссова профиля лазерного излучения на форму линии КПН-резонанса с учетом полевого сдвига, зависящего от локальной интенсивности поля. Показано, что пространственная неоднородность полевого сдвига является причиной возникновения асимметрии формы линии, и гауссов профиль приводит к существенно нелинейному характеру зависимости сдвига вершины резонанса от мощности поля. Кроме того, исследуется влияние пространственной неоднородности светового пучка на сдвиг положения нуля сигнала ошибки. Рассматриваются два способа генерации сигнала ошибки, используемого для стабилизации частоты в атомных часах. В первом методе применяется гармоническая модуляции двух-фотонной отстройки (разности оптических частот). Во втором методе осуществляется периодическая модуляция разности фаз компонент бихроматического поля ступенчатым образом (фазовые прыжки). Показано, что пространственная неоднородность светового пучка (гауссов поперечный профиль) в обоих случаях приводит к нелинейной зависимости сдвига сигнала ошибки от мощности лазерного излучения. При этом степень нелинейности зависит от частоты модуляции двух-фотонной отстройки или разности фаз, а также от параметра открытости Λ-системы. Однако использование апертуры, которая выделяет центральную часть светового пучка, позволяет существенно уменьшить нелинейность полевого сдвига.

В **Главе 5** исследуется возможность подавления полевых сдвигов в рамсеевской спектроскопии когерентного пленения населенностей (КПН) методами обобщенной автобалансной рамсеевской спектроскопии (ОАБРС) и комбинированного сигнала ошибки (КСО). На основании проведенного строгого математического доказательства и численных расчетов показано, что использование данных методов приводит к существенному подавлению полевого сдвига и его флуктуаций. Также рассматривается метод модифицированного КСО (МКСО), в котором два последовательных опроса атомов с разным временем свободной эволюции объединены в один цикл.

В **Заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации, и выводы по проделанной работе.

На **защиту** выносятся следующие **положения**:

1. Классификация циклических дипольных переходов по отношению к направлению сверхузкого резонанса в случае чисто радиационной релаксации для бихроматического лазерного поля справедлива при произвольных интенсивностях и эллиптических поляризациях его частотных компонент. «Яркими» являются переходы $F_g = F \rightarrow F_e = F + 1$, на которых реализуются резонансы ЭИА. В свою очередь, «темные» переходы есть переходы $F_g = F \rightarrow F_e = F$ и $F_g = F \rightarrow F_e = F - 1$, для которых реализуются резонансы ЭИП.

2. Оптимальные параметры частотной модуляции двух-фотонной отстройки бихроматического поля, при которых достигается максимальный наклон линейного участка сигнала ошибки в КПН-часах, соответствуют существенно динамическому (нестационарному) режиму формирования темного резонанса.

3. Зависимость сдвига нуля сигнала ошибки от мощности для КПН-часов в случае гауссова пространственного профиля светового пучка имеет существенно нелинейный характер. Диафрагма, выделяющая центральную часть светового пучка, позволяет в значительной степени линеаризовать данную зависимость.

4. Применение автобалансной схемы и комбинированного сигнала ошибки в рамсеевской спектроскопии КПН-резонансов приводит к существенному подавлению полевого сдвига и его флуктуаций.

Степень достоверности полученных результатов:

Все выполненные расчеты и аналитические выкладки проведены в строгом соответствии с математическим формализмом матрицы плотности. Проведено сравнение части теоретических результатов с экспериментальными данными и получено их хорошее качественное согласование. Достоверность результатов работы обеспечивается также и тем, что они получены с использованием различных численных методов и совпадают между собой.

Личный вклад соискателя:

Все основные результаты по теме диссертации получены автором лично или при непосредственном его участии и опубликованы в 17 работах, в том числе 8 из них в рецензируемых научных журналах [116–123] и 9 в материалах российских и международных конференций [124–132]. Постановка задач, интерпретация полученных результатов и формулировка выводов исследований осуществлялись совместно с научным руководителем и другими соавторами публикаций.

Апробация:

Результаты проведенной работы докладывались на 14 конференциях: Международная научная студенческая конференция МНСК (2017, 2021); Joint Conference of the European Frequency and Time Forum and IEEE International Frequency Control Symposium (2017, 2021); Оптические и информационные технологии (2017); X Международная конференция молодых ученых и специалистов (Оптика – 2017); Конкурс-конференция ИЛФ СО РАН (2017, 2019); Всероссийская научная конференция «Физика ультрахолодных атомов» (2019, 2020, 2022); Молодежная конкурс-конференция «Оптические и информационные технологии» (2020); XII Международная конференция «Фундаментальные проблемы оптики» (ФПО – 2020); The IX International Symposium «Modern Problems of Laser Physics» (MPLP – 2021).

В заключении данного раздела хочу выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Юдину Валерию Ивановичу за внимательное отношение, помощь в преодолении возникавших затруднений, интересную совместную работу, а также сказать слова благодарности к.ф.-м.н. Басалаеву Максиму Юрьевичу и д.ф.-м.н. Тайченачеву Алексею Владимировичу за полезные обсуждения и поддержку.

Глава 1
Формализм матрицы плотности

В данной главе излагается математический формализм методов, используемых для решения задач диссертационного исследования.

1.1 Теория динамического стационарного состояния и алгоритм его расчёта

В данном разделе описывается численный алгоритм расчета спектроскопического сигнала, возбуждаемого в квантовой системе лазерным полем с произвольной периодической временной модуляцией параметров поля. В основе этого подхода лежит концепция так называемого динамического стационара [109]. При этом периодическое решение ищется без рассмотрения задачи с начальными условиями и учитываются вклады от взаимодействия со всеми Фурье-гармониками.

Общая математическая формулировка проблемы стационарного состояния для периодически возбуждаемых квантовых систем состоит в следующем. Рассмотрим динамическое линейное уравнение на матрицу плотности $\hat{\rho}(t)$ с учетом сохранения ее нормировки:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \hat{\mathcal{L}}(t)\{\hat{\rho}(t)\}; \quad \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(t)\} = 1, \tag{1.1}$$

где линейный операторный функционал $\hat{\mathcal{L}}(t)\{\ldots\}$ включает в себя взаимодействие квантовой системы с внешними электромагнитными полями, а также все возможные релаксационные процессы (спонтанные, столкновительные, пролетные и пр.). Матрица $\hat{\rho}(t)$ и её нормировка в базисе атомных состояний $\{|j\rangle\}$ имеют вид:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{a,b} |a\rangle \rho_{ab}(t) \langle b|; \quad \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(t)\} = \sum_{j} \rho_{jj}(t) = 1, \tag{1.2}$$

где $\rho_{ab}(t)$ есть матричные элементы. Сохранение нормировки в (1.1) означает вырожденность уравнений в правой части динамического уравнения, которая соответствует следующему условию:

$$\mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{L}}(t)\{\hat{\rho}\}] = \sum_j \langle j | \hat{\mathcal{L}}(t)\{\hat{\rho}\} | j \rangle = 0 \tag{1.3}$$

для произвольного аргумента $\hat{\rho}$.

Предположим теперь наличие временного периода T при взаимодействии с внешними полями, которое заключено в операторном функционале $\hat{\mathcal{L}}(t)\{\ldots\}$:

$$\hat{\mathcal{L}}(t+T)\{\ldots\} = \hat{\mathcal{L}}(t)\{\ldots\}\,. \tag{1.4}$$

В этом случае, как будет показано ниже, уравнение (1.1) всегда имеет периодическое решение с тем же периодом T:

$$\hat{\rho}(t+T) = \hat{\rho}(t) \tag{1.5}$$

для произвольного t.

Для доказательства сначала переформулируем динамическое уравнение (1.1) в векторном виде:

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}(t)}{dt} = \hat{L}(t)\boldsymbol{\rho}(t)\,, \tag{1.6}$$

где вектор-столбец $\boldsymbol{\rho}(t)$ образован из матричных элементов $\rho_{ab}(t)$ по какому-либо определенному правилу, а квадратная матрица $\hat{L}(t)$ в соответствии с этим правилом определяется из операторного функционала $\hat{\mathcal{L}}(t)\{\ldots\}$. В частности, для трехуровневого атома в базисе состояний $|1\rangle$, $|2\rangle$ и $|3\rangle$ имеются девять матричных элементов $\rho_{ab}(t)$ $(a,\ b = 1,\ 2,\ 3)$, из которых можно сформировать вектор-столбец по следующему правилу:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \left(\rho_{11}(t),\ \rho_{12}(t),\ \rho_{13}(t),\ \rho_{21}(t),\ \rho_{22}(t),\ \rho_{23}(t),\ \rho_{31}(t),\ \rho_{32}(t),\ \rho_{33}(t)\right)^T. \tag{1.7}$$

Кроме того, определим еще один вектор-столбец $\boldsymbol{n}$, позволяющий выразить величину $\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(t)\}$ в виде скалярного произведения:

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(t)\} = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\rho}(t))\,, \tag{1.8}$$

где используется стандартное определение скалярного произведения для произвольных комплексных векторов: $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_m x_m^* y_m$. Вектор $\boldsymbol{n}$, строится следующим образом: рассматривается вектор $\boldsymbol{\rho}(t)$, и в тех позициях, где находятся

диагональные элементы $\rho_{jj}(t)$ вектор $\boldsymbol{n}$ имеет единицы, а в остальных позициях – нули. Например, для трехуровневого атома в случае определения (1.7) имеет место:

$$\boldsymbol{n} = \left(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\right)^T. \tag{1.9}$$

Отметим, что принципиальным моментом для дальнейших рассуждений является универсальность и независимость вектора $\boldsymbol{n}$ от времени t.

Пусть в какой-то момент времени t_1 имеем произвольный вектор $\boldsymbol{\rho}(t_1)$. Тогда, в соответствии с уравнением (1.6), для другого момента времени t_2 можно записать:

$$\boldsymbol{\rho}(t_2) = \hat{A}(t_2,t_1)\boldsymbol{\rho}(t_1), \tag{1.10}$$

где двух-временной оператор эволюции $\hat{A}(t_2,t_1)$ определяется матрицей $\hat{L}(t)$. Отметим, что в случае условия периодичности (1.4) выполняется соотношение:

$$\hat{A}(t_2+T,t_1+T) = \hat{A}(t_2,t_1) \tag{1.11}$$

для произвольных t_1, t_2. Однако, прежде чем преступить к рассмотрению периодического случая, докажем еще несколько общих утверждений. Для этого, умножив выражение (1.10) скалярным образом слева на вектор $\boldsymbol{n}$, запишем:

$$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\rho}(t_2)) = (\boldsymbol{n},\hat{A}(t_2,t_1)\boldsymbol{\rho}(t_1)) = (\hat{A}^+(t_2,t_1)\boldsymbol{n},\boldsymbol{\rho}(t_1)), \tag{1.12}$$

где $\hat{A}^+(t_2,t_1)$ есть эрмитово-сопряженный оператор к $\hat{A}(t_2,t_1)$. Поскольку из-за сохранения нормировки имеет место $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\rho}(t_2)) = (\boldsymbol{n},\boldsymbol{\rho}(t_1))$, то из (1.12) следует:

$$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\rho}(t_1)) = (\hat{A}^+(t_2,t_1)\boldsymbol{n},\boldsymbol{\rho}(t_1)), \tag{1.13}$$

для произвольного $\boldsymbol{\rho}(t_1)$. А это, в свою очередь, означает

$$\hat{A}^+(t_2,t_1)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}, \tag{1.14}$$

то есть оператор $\hat{A}^+(t_2,t_1)$ всегда имеет собственный вектор с вещественным значением 1. Следовательно, такое собственное значение 1 всегда существует и для прямого оператора $\hat{A}(t_2,t_1)$, то есть всегда существует собственный вектор-столбец $\boldsymbol{r}(t_2,t_1)$, удовлетворяющий уравнению:

$$\hat{A}(t_2,t_1)\boldsymbol{r}(t_2,t_1) = \boldsymbol{r}(t_2,t_1). \tag{1.15}$$

Однако здесь, в отличие от (1.14), собственный вектор $\boldsymbol{r}(t_2,t_1)$ зависит в общем случае от t_1, t_2.

Перейдем теперь к доказательству существования (1.5) в случае периодичности оператора (1.4). Рассмотрим вектор $\boldsymbol{\rho}(t)$ в произвольный момент времени t. В соответствии с (1.10) вектор $\boldsymbol{\rho}(t+T)$ в момент времени $t+T$ определяется как

$$\boldsymbol{\rho}(t+T)=\hat{A}(t+T,t)\boldsymbol{\rho}(t)\,. \tag{1.16}$$

Предположив существование периодического решения $\boldsymbol{\rho}(t+T)=\boldsymbol{\rho}(t)$ из (1.16) следует, что оно должно удовлетворять уравнению:

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\hat{A}(t+T,t)\boldsymbol{\rho}(t);\quad (\boldsymbol{n},\boldsymbol{\rho}(t))=1\,, \tag{1.17}$$

которое всегда имеет ненулевое решение в силу доказанного выше утверждения о наличии собственного вектора с собственным значением 1 для оператора $\hat{A}(t_2,t_1)$ при произвольных t_1, t_2 (см. (1.15)). Используя, соотношение (1.11), нетрудно показать, что из (1.16) – (1.17) следует $\boldsymbol{\rho}(t+lT)=\boldsymbol{\rho}(t)$ ($l=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$). Учитывая произвольность выбранного момента времени t в (1.16) – (1.17), можно утверждать, что теорема о существовании периодического решения (1.5) доказана.

Это периодическое решение для большинства случаев является единственным и вследствие релаксационных процессов реализуется в течение времени эволюции как асимптотическое ($t\to+\infty$) независимо от начальных условий. В силу функциональной зависимости от времени состояние (1.5) может быть охарактеризовано как динамическое стационарное состояние [109].

Однако, принимая во внимание математическую общность, для некоторых теоретических моделей можно предположить существование нескольких решений $\{\boldsymbol{\rho}_1(t),\ \boldsymbol{\rho}_2(t),\ \ldots,\ \boldsymbol{\rho}_Q(t)\}$ для уравнения (1.17), когда собственное значение 1 для матрицы $\hat{A}(t+T,t)$ является вырожденным несмотря на релаксационные процессы. В этом случае, общее периодическое решение имеет форму суперпозиции:

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\sum_{q=1}^{Q}\alpha_q\boldsymbol{\rho}_q(t);\quad (\boldsymbol{n},\boldsymbol{\rho}_q(t))=1;\quad \sum_{q=1}^{Q}\alpha_q=1\,, \tag{1.18}$$

где набор чисел $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_Q\}$ для асимптотического решения $(t \to +\infty)$ будет зависеть от начальных условий (при динамическом рассмотрении).

Покажем, что найденное решение (1.17) является обобщением стационарного состояния, когда оператор $\hat{L}$ в (1.6) не зависит от времени t и стационарное решение удовлетворяет уравнению:

$$\hat{L}\boldsymbol{\rho}_{\text{st-st}} = 0;\ \ (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\rho}_{\text{st-st}}) = 1. \tag{1.19}$$

Очевидно, что стационарный случай может быть рассмотрен как периодический с произвольным значением периода T. Следовательно, согласно проведенному выше анализу, состояние $\boldsymbol{\rho}_{\text{st-st}}$ также должно удовлетворять уравнению (1.17) при произвольных t, T. И действительно, в стационарном случае $(\hat{L} = \text{const})$ для любых t, T имеет место:

$$\hat{A}(t+T,t) = e^{\hat{L}T} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k \hat{L}^k. \tag{1.20}$$

Учитывая теперь (1.20), получаем полное соответствие с (1.17):

$$\hat{A}(t+T,t)\boldsymbol{\rho}_{\text{st-st}} = \boldsymbol{\rho}_{\text{st-st}}. \tag{1.21}$$

Численный алгоритм расчета матрицы плотности, основанный на использовании уравнения (1.17), состоит в следующем. Рассмотрим произвольную периодическую зависимость какого-либо параметра поля $U(t) = U(t+T)$, входящего в оператор $\hat{L}(t)$ (см. рис. 1.1). Например, в задаче о взаимодействии атомов (молекул) с электромагнитным полем такими параметрами могут быть амплитуда, фаза, поляризация и др. Разобьем выбранный временной интервал $[t_0, t_0 + T]$ на N малых подинтервалов, при этом $t_N = t_0 + T$. Характер разбиения (равномерное или неравномерное) и число подинтервалов определяется сообразно конкретной задаче. Аппроксимируем зависимость $U(t)$ ступенчатой (см. рисунок 1.1), когда внутри каждого подинтервала $(t_{m-1}, t_m]$ параметр $U(t)$ принимает постоянное значение $U(t_{m-1})$. В этом случае вектор $\boldsymbol{\rho}(t_0)$ в начальной точке временного интервала определяется в соответствии с уравнением (1.17), в

котором оператор эволюции $\hat{A}(t_0+T,t_0)$ имеет вид упорядоченного произведения матричных экспонент:

$$\hat{A}(t_0+T,t_0)=\prod_{m=1}^{m=N} e^{(t_m-t_{m-1})\hat{L}(t_{m-1})}=e^{(t_N-t_{N-1})\hat{L}(t_{N-1})}\ldots e^{(t_1-t_0)\hat{L}(t_0)}\,. \qquad (1.22)$$

Далее значение $\boldsymbol{\rho}(t_m)$ в остальных точках интервала $[t_0,t_0+T]$ определяется по рекурренции:

$$\boldsymbol{\rho}(t_m)=e^{(t_m-t_{m-1})\hat{L}(t_{m-1})}\boldsymbol{\rho}(t_{m-1})\,. \qquad (1.23)$$

Данный алгоритм автоматически учитывает полный набор всех частотных компонент и значительно упрощает численные вычисления для любого типа периодической модуляции: от плавной гармонической до ультракоротких импульсов (практически без значительного изменения времени вычисления). В противоположность этому, для того, чтобы численно решить уравнение (1.6), используя Фурье-анализ, необходимо использовать следующее разложение:

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\sum_k \boldsymbol{\rho}_k e^{i2\pi t/T} \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)\,, \qquad (1.24)$$

где компоненты $\boldsymbol{\rho}_k$ удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношениям, которые в общем случае могут быть очень сложными и могут привести к огромным вычислительным затратам.

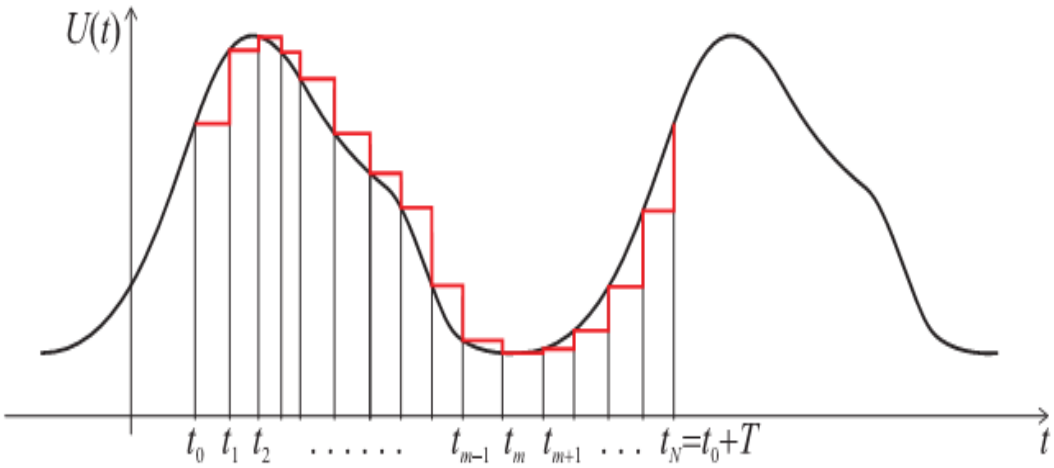

Рисунок 1.1 – Иллюстрация временного разбиения интервала $[t_0,t_0+T]$ на N подинтервалов и соответствующая аппроксимация зависимости $U(t)$ ломаной ступенчатой линией (красная линия).

Заметим также, что для газа атомов необходимо учитывать их движение, что приводит к зависимости матрицы плотности от скорости $\mathbf{v}$. В этом случае периодическое стационарное состояние $\boldsymbol{\rho}(t+T,\mathbf{v})=\boldsymbol{\rho}(t,\mathbf{v})$ необходимо искать для каждой скоростной группы, а затем вычислять спектроскопический сигнал усреднением по скорости.

1.2 Метод матричных цепных дробей

В данном разделе описывается численный алгоритм расчета Фурье-гармоник спектроскопического сигнала, возбуждаемого в квантовой системе лазерным полем с гармонической временной модуляцией параметров поля на частоте f_m. В этом случае динамическое уравнение на матрицу плотности в может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial t}=(\hat{L}_0+e^{-if_m t}\hat{L}_{+1}+e^{if_m t}\hat{L}_{-1})\boldsymbol{\rho}. \tag{1.25}$$

Ищем решение системы (1.25) в виде ряда Фурье:

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{inf_m t}\boldsymbol{\rho}_n. \tag{1.26}$$

Тогда из (1.25) получаем трехчленное рекуррентное соотношение:

$$(\hat{L}_0-inf_m\hat{I})\boldsymbol{\rho}_n+\hat{L}_{+1}\boldsymbol{\rho}_{n+1}+\hat{L}_{-1}\boldsymbol{\rho}_{n-1}=0, \tag{1.27}$$

где $\hat{I}$ есть единичная матрица. Определяем при положительных $n\geq 0$ решение для (1.27) в виде:

$$\boldsymbol{\rho}_{n+1}=\hat{X}_{n+1}\boldsymbol{\rho}_n. \tag{1.28}$$

Подставляя (1.28) в (1.27), получаем:

$$(\hat{L}_0-inf_m\hat{I}+\hat{L}_{+1}\hat{X}_{n+1})\boldsymbol{\rho}_n+\hat{L}_{-1}\boldsymbol{\rho}_{n-1}=0, \tag{1.29}$$

откуда следует:

$$\boldsymbol{\rho}_n=-(\hat{L}_0-inf_m\hat{I}+\hat{L}_{+1}\hat{X}_{n+1})^{-1}\hat{L}_{-1}\boldsymbol{\rho}_{n-1}. \tag{1.30}$$

С другой стороны, из (1.28) имеем:

$$\boldsymbol{\rho}_n=\hat{X}_n\boldsymbol{\rho}_{n-1}. \tag{1.31}$$

Сопоставляя (1.31) и (1.30), получаем для $n \geq 1$ двухчленное рекуррентное соотношение на матрицы $\hat{X}_n$:

$$\hat{X}_n = -(\hat{L}_0 - inf_m \hat{I} + \hat{L}_{+1}\hat{X}_{n+1})^{-1}\hat{L}_{-1}. \tag{1.32}$$

Рассмотрим теперь случай отрицательных $n \leq -1$. Для этого в (1.27) проведем замену $n \to (-n)$:

$$(\hat{L}_0 + inf_m \hat{I})\boldsymbol{\rho}_{-n} + \hat{L}_{+1}\boldsymbol{\rho}_{-n+1} + \hat{L}_{-1}\boldsymbol{\rho}_{-n-1} = 0. \tag{1.33}$$

По аналогии с (1.28), определяем при $n \geq 0$ решение для (1.33) в виде:

$$\boldsymbol{\rho}_{-(n+1)} = \hat{Y}_{-(n+1)}\boldsymbol{\rho}_{-n}. \tag{1.34}$$

Подставляя (1.34) в (1.33), получаем

$$\boldsymbol{\rho}_{-n} = -(\hat{L}_0 - i(-n) f_m \hat{I} + \hat{L}_{-1}\hat{Y}_{-(n+1)})^{-1}\hat{L}_{+1}\boldsymbol{\rho}_{-(n-1)}. \tag{1.35}$$

С другой стороны, из (1.34) имеем

$$\boldsymbol{\rho}_{-n} = \hat{Y}_{-n}\boldsymbol{\rho}_{-(n-1)}. \tag{1.36}$$

Сопоставляя (1.36) и (1.35), получаем для $n \geq 1$ двухчленное рекуррентное соотношение на матрицы $\hat{Y}_{-n}$:

$$\hat{Y}_{-n} = -(\hat{L}_0 + inf_m \hat{I} + \hat{L}_{-1}\hat{Y}_{-(n+1)})^{-1}\hat{L}_{+1}. \tag{1.37}$$

Полагая для некоторого N: $\hat{X}_{N+1} = 0$ и $\hat{Y}_{-(N+1)} = 0$, из рекуррентных соотношений (1.32) и (1.37) находим $\hat{X}_1$ и $\hat{Y}_{-1}$. Далее, рассмотрим уравнение (1.27) для $n = 0$:

$$\hat{L}_0\boldsymbol{\rho}_0 + \hat{L}_{+1}\boldsymbol{\rho}_{+1} + \hat{L}_{-1}\boldsymbol{\rho}_{-1} = 0. \tag{1.38}$$

Используя здесь соотношения $\boldsymbol{\rho}_{+1} = \hat{X}_{+1}\boldsymbol{\rho}_0$ и $\boldsymbol{\rho}_{-1} = \hat{Y}_{-1}\boldsymbol{\rho}_0$, получаем:

$$(\hat{L}_0 + \hat{L}_{+1}\hat{X}_{+1} + \hat{L}_{-1}\hat{Y}_{-1})\boldsymbol{\rho}_0 = 0. \tag{1.39}$$

Дополняя вырожденную систему уравнений (1.39) условием нормировки

$$\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{\rho}_0\} = 1, \tag{1.40}$$

находим $\boldsymbol{\rho}_0$, что теперь, в соответствии с формулами (1.28) и (1.34) позволяет определить все $\boldsymbol{\rho}_n$ до $\boldsymbol{\rho}_N$ и $\boldsymbol{\rho}_{-N}$, включительно:

$$\boldsymbol{\rho}_n = \hat{X}_n\hat{X}_{n-1}...\hat{X}_1\boldsymbol{\rho}_0; \qquad \boldsymbol{\rho}_{-n} = \hat{Y}_{-n}\hat{Y}_{-n+1}...\hat{Y}_{-1}\boldsymbol{\rho}_0. \tag{1.41}$$

Глава 2

Резонансы электромагнитно-индуцированной прозрачности и абсорбции (ЭИП/ЭИА) в световом поле эллиптически поляризованных волн

2.1 Теоретическая модель

Рассмотрим взаимодействие эллиптически поляризованного бихроматического (двухчастотного) поля

$$\boldsymbol{E}(t,z) = E_1\mathbf{e}_1\,\mathrm{e}^{-i(\omega_1 t - k_1 z)} + E_2\mathbf{e}_2\,\mathrm{e}^{-i(\omega_2 t - k_2 z)} + \text{к.с.} \tag{2.1}$$

с атомарным газом, у которого вырожденные по проекциям полного углового момента основное (g) и возбужденное (e) состояния образуют замкнутый оптический дипольный переход $F_g \to F_e$ (см. рисунок 2.1) (к.с. – комплексное сопряжение).

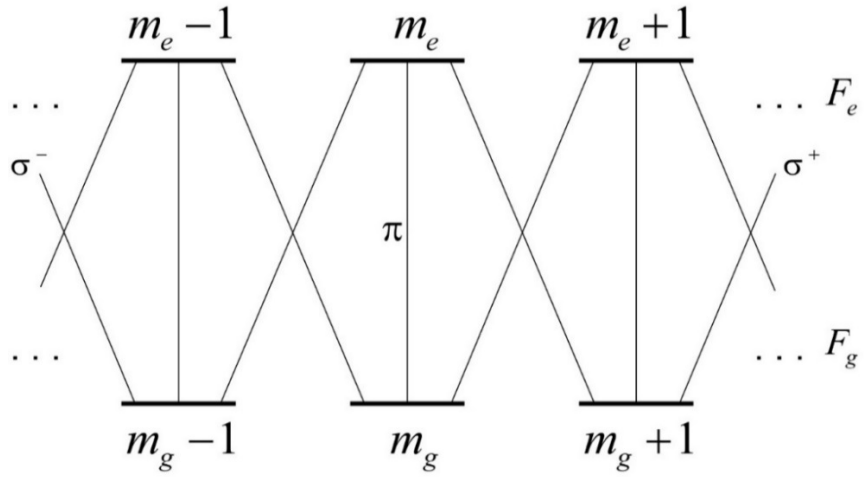

Рисунок 2.1 – Схема уровней энергии атома, вырожденных по проекциям полных угловых моментов основного F_g и возбужденного F_e состояний на ось квантования z. Линиями обозначены светоиндуцируемые переходы σ^+-, σ^-- и π-типов.

Здесь $E_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$ есть скалярные амплитуды и частоты световых волн, соответственно, $k_{1,2}$ – волновые числа. Учитываем, что при исследовании сверхузких резонансов разность частот $\omega_1 - \omega_2$ столь незначительна, поэтому можно с большой точностью для волновых чисел можно полагать, что $k_1 = k_2 = k$.

Единичные комплексные векторы эллиптической поляризации $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ представим в циклическом базисе:

$$\mathbf{e}_j = \sum_{q=0,\pm1} e_j^{(q)} \mathbf{e}_q \quad (j = 1,2), \tag{2.2}$$

где $\mathbf{e}_{\pm1} = \mp(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z$ – орты циклического базиса, а $e_j^{(q)}$ – контравариантные компоненты единичного вектора поляризации j-й волны. Направим ось x вдоль главной оси эллипса поляризации волны $\mathbf{E}_1$; тогда для единичных векторов поляризации (2.2) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\sin(\varepsilon_1 - \pi/4)\mathbf{e}_{-1} - \cos(\varepsilon_1 - \pi/4)\mathbf{e}_{+1}, \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin(\varepsilon_2 - \pi/4)e^{i\phi}\mathbf{e}_{-1} - \cos(\varepsilon_2 - \pi/4)e^{-i\phi}\mathbf{e}_{+1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь ϕ – угол между главными осями эллипсов поляризации (см. рисунок 2.2); параметр эллиптичности ε определен в интервале $-\pi/4 \le \varepsilon \le \pi/4$, причем $|\tan(\varepsilon)|$ есть отношение полуосей эллипса, а знак ε задает направление вращения электрической составляющей светового поля. В частности, значения $\varepsilon = \pm\pi/4$ и $\varepsilon = 0$ отвечают циркулярной (правой и левой) и линейной поляризации, соответственно.

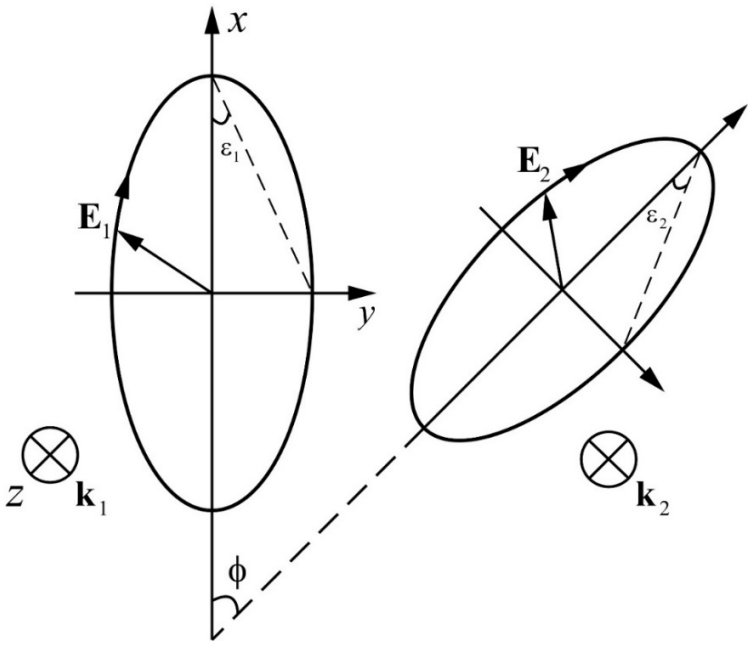

Рисунок 2.2 – Взаимная ориентация эллипсов поляризации волн: $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ – волновые векторы волн, ϕ – угол между главными осями эллипсов, $\varepsilon_{1,2}$ – параметры эллиптичности.

Атомная среда предполагается достаточно разреженной, что позволяет пренебречь эффектами межатомного взаимодействия и решать задачу в одноатомном приближении. Для математического описания взаимодействия атомов с электромагнитным полем будем использовать стандартный формализм матрицы плотности $\hat{\rho}$, уравнение для которой имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\hat{\rho} + \hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\} = -\frac{i}{\hbar}\left[(\hat{H}_0 + \hat{V}), \hat{\rho}\right], \tag{2.4}$$

где $\hat{H}_0$ – гамильтониан невозмущенного атома, который в базисе зеемановских состояний $\left|F, m\right\rangle$ имеет вид

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=g,e}\sum_{m_j}\mathcal{E}_j\left|F_j, m_j\right\rangle\left\langle F_j, m_j\right|, \tag{2.5}$$

$\mathcal{E}_j$ – энергия j-го состояния. Проекции m_j j-го углового момента F_j на ось квантования z пробегают значения $m_j = -F_j, -F_j + 1, \ldots, F_j$. $\mathbf{v}$ – вектор скорости атома. Оператор $\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\}$ описывает релаксационные процессы (спонтанные, столкновительные, пролетные и т.д.), $\hat{V} = -(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E})$ – оператор взаимодействия атомов с полем (где $\hat{\mathbf{d}}$ – векторный оператор электрического дипольного момента), который в резонансном приближении (приближении вращающейся волны) определяется как

$$\hat{V}(z,t) = \hbar\Omega_1\hat{V}_1(z,t) + \hbar\Omega_2\hat{V}_2(z,t) + \text{э.с.}. \tag{2.6}$$

Здесь $\Omega_{1,2} = -dE_{1,2}/\hbar$ есть частоты Раби, (d – приведенный матричный элемент дипольного момента $\hat{\mathbf{d}}$), э.с. означает эрмитово сопряжение. Безразмерные операторы взаимодействия $\hat{V}_{1,2}(t)$ имеют вид:

$$\hat{V}_{1,2}(z,t) = \hat{V}_{1,2}e^{-i(\omega_{1,2}t - kz)}, \tag{2.7}$$

где

$$\hat{V}_j = \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{q=0,\pm1}\hat{T}_q e_j^{(q)}, \; j = 1, 2. \tag{2.8}$$

Циклические компоненты векторного оператора $\hat{\mathbf{T}}$ выражаются через $3jm$-символы:

$$\hat{T}_q = \sum_{\{m\}} (-1)^{F_e - m_e} \begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ -m_e & q & m_g \end{pmatrix} \left| F_e, m_e \right\rangle \left\langle F_g, m_g \right|. \tag{2.9}$$

Разобьем матрицу плотности $\hat{\rho}$ на четыре блока

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{gg} + \hat{\rho}^{ee} + \hat{\rho}^{eg} + \hat{\rho}^{ge}, \tag{2.10}$$

где каждый из блоков есть матрица

$$\hat{\rho}^{ab} = \sum_{m_a, m_b} \rho^{ab}_{m_a, m_b} \left| F_a, m_a \right\rangle \left\langle F_b, m_b \right|, \tag{2.11}$$

В силу эрмитовости матрицы плотности, имеем: $\hat{\rho}^{gg\dagger} = \hat{\rho}^{gg}$, $\hat{\rho}^{ee\dagger} = \hat{\rho}^{ee}$, $\hat{\rho}^{eg\dagger} = \hat{\rho}^{ge}$. Диагональные матричные блоки $\hat{\rho}^{gg}$ и $\hat{\rho}^{ee}$ описывают населенности атомных состояний и низкочастотные (зеемановские) когерентности, а недиагональные матричные блоки $\hat{\rho}^{eg}$ и $\hat{\rho}^{ge}$ соответствуют оптическим когерентностям.

Далее, подставляя выражения (2.5), (2.6) в уравнение (2.4), и выделяя в оптических когерентностях быстрые временные осцилляции на частоте одной из волн (например, на ω_1)

$$\hat{\rho}^{eg} = \hat{\tilde{\rho}}^{eg} e^{-i(\omega_1 t - kz)}, \; \hat{\rho}^{ge} = \hat{\tilde{\rho}}^{ge} e^{i(\omega_1 t - kz)}, \tag{2.12}$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{\text{opt}} - i\delta + ik\text{v}_z \right) \hat{\tilde{\rho}}^{eg} = -i\Omega_1 \left[\hat{V}_1 \hat{\rho}^{gg} - \hat{\rho}^{ee} \hat{V}_1 \right] - \\
&\quad - i\Omega_2 e^{-i\Delta t} \left[\hat{V}_2 \hat{\rho}^{gg} - \hat{\rho}^{ee} \hat{V}_2 \right], \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{\text{opt}} + i\delta - ik\text{v}_z \right) \hat{\tilde{\rho}}^{ge} = -i\Omega_1 \left[\hat{V}_1^\dagger \hat{\rho}^{ee} - \hat{\rho}^{gg} \hat{V}_1^\dagger \right] - \\
&\quad - i\Omega_2 e^{i\Delta t} \left[\hat{V}_2^\dagger \hat{\rho}^{ee} - \hat{\rho}^{gg} \hat{V}_2^\dagger \right], \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{\text{sp}} + \Gamma \right) \hat{\rho}^{ee} = -i\Omega_1 \left[\hat{V}_1 \hat{\tilde{\rho}}^{ge} - \hat{\tilde{\rho}}^{eg} \hat{V}_1^\dagger \right] - \\
&\quad - i\Omega_2 \left[e^{-i\Delta t} \hat{V}_2 \hat{\tilde{\rho}}^{ge} - e^{i\Delta t} \hat{\tilde{\rho}}^{eg} \hat{V}_2^\dagger \right], \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma \right) \hat{\rho}^{gg} - \Gamma \hat{\rho}^{gg}(0) = \hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}\} - i\Omega_1 \left[\hat{V}_1^\dagger \hat{\tilde{\rho}}^{eg} - \hat{\tilde{\rho}}^{ge} \hat{V}_1 \right] - \\
&\quad - i\Omega_2 \left[e^{i\Delta t} \hat{V}_2^\dagger \hat{\tilde{\rho}}^{eg} - e^{-i\Delta t} \hat{\tilde{\rho}}^{ge} \hat{V}_2 \right].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь $\Delta \equiv \omega_2 - \omega_1$ есть разность частот волн поля, γ_{sp} – скорость радиационного распада возбужденного состояния, константа Γ отвечает за времяпролетную или диффузионную релаксацию в основном состоянии к начальному (изотропному) распределению $\hat{\rho}^{gg}(0) = \hat{1}^{gg} \cdot \text{Tr}\{\hat{\rho}\} / (2F_g + 1)$ в отсутствие светового поля (где $\hat{1}^{gg}$ – единичная матрица размерности $(2F_g + 1) \times (2F_g + 1)$, а $\text{Tr}\{\ldots\}$ обозначает операцию взятия следа матрицы), γ_{opt} есть скорость релаксации оптических когерентностей. Отстройка частоты одной из волн светового поля ω_1 от частоты перехода ω_0 обозначена как $\delta \equiv \omega_1 - \omega_0$. Оператор $\hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}\}$ описывает приход атомов с возбужденного уровня на основной. v_z – проекция скорости атома на ось z (учитывается только одномерное движение атомов вдоль оси z, то есть вектор скорости атома имеет вид: $\mathbf{v} = (0, 0, \text{v}_z)$). В стандартной модели спонтанной релаксации с учетом переноса анизотропии этот оператор определяется как

$$\hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}\} = \gamma_{\text{sp}}(2F_e + 1) \sum_{q=0,\pm1} \hat{T}_q^{\dagger} \hat{\rho}^{ee} \hat{T}_q. \tag{2.14}$$

В модели без переноса анизотропии имеет место другое выражение:

$$\hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}\} = \gamma_{\text{sp}} \frac{\hat{1}^{gg} \cdot \text{Tr}\{\hat{\rho}^{ee}\}}{2F_g + 1}. \tag{2.15}$$

Отметим, что для циклического перехода $F_g \to F_e$ суммарная населенность на основном и возбужденном уровнях сохраняется:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}^{gg}\} + \text{Tr}\{\hat{\rho}^{ee}\} = 1. \tag{2.16}$$

В качестве спектроскопического сигнала рассматривалось поглощение светового поля, которое в приближении оптически тонкой среды определяется полной населенностью возбужденного уровня:

$$A(t, k\text{v}_z) = \text{Tr}\{\hat{\rho}^{ee}(t, k\text{v}_z)\} \tag{2.17}$$

Видно, что правые части уравнений (2.13) являются периодическими функциями времени с периодом $T = 2\pi/|\Delta|$. В соответствии с теоремой о существовании динамического стационарного состояния для матрицы плотности [109], временная зависимость сигнала (2.17) также является периодической с тем же периодом T. В

настоящей работе с помощью метода матричных цепных дробей, подробно описанного в первой главе настоящей диссертации, находим нулевую гармонику сигнала (2.17), выражение для которой имеет следующий вид:

$$A_0(k\mathrm{v}_z) = \frac{1}{T}\int_0^T A(t, k\mathrm{v}_z)dt. \tag{2.18}$$

Далее выражение (2.18) должно быть усреднено по максвелловскому скоростному распределению атомов:

$$\overline{A}_0 = \frac{k}{\sqrt{\pi}\omega_D}\int_{-\infty}^{+\infty} A_0(k\mathrm{v}_z)\cdot e^{-\frac{(k\mathrm{v}_z)^2}{\omega_D^2}} d\mathrm{v}_z, \tag{2.19}$$

где ω_D есть доплеровская ширина спектральной линии.

2.2 Полученные результаты

В данной работе исследуется спектроскопический сигнал (2.19) для замкнутого дипольного перехода в зависимости от значений F_g и F_e. Сигнал поглощения (2.19) является функцией разности частот волн Δ, и сверхузкая резонансная структура проявляется вблизи $\Delta = 0$. Численные расчеты проводились для различных эллиптических поляризаций волн (включая линейную и циркулярную) и для достаточно сильной интенсивности поля, когда теория возмущений [107] уже неприменима (пролетный параметр насыщения $\gamma_{\mathrm{sp}} S / \Gamma \gtrsim 1$, где $S = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) / \gamma_{\mathrm{sp}}^2$ – обычный параметр насыщения перехода в резонансе). Рассматривалась модель со спонтанным переносом анизотропии (2.14) (см. рисунки 2.3, 2.4 и 2.5) и без неё (2.15) (см. рисунок 2.6).

На рисунках 2.3(a–d) и 2.4(a–d) приведены зависимости сигнала (2.19) от Δ для частных случаев переходов $F_g = F \to F_e = F$ и $F_g = F \to F_e = F - 1$, соответственно. Видно, что данные резонансы направлены вниз, и проявляется эффект ЭИП, поэтому переходы эти являются “тёмными”. В свою очередь, на рисунке 2.5(a–d) представлены аналогичные зависимости для частных случаев

переходов $F_g = F \to F_e = F + 1$. В этом случае резонансы направлены вверх, то есть имеет место эффект ЭИА, в связи с чем данные переходы являются “яркими”.

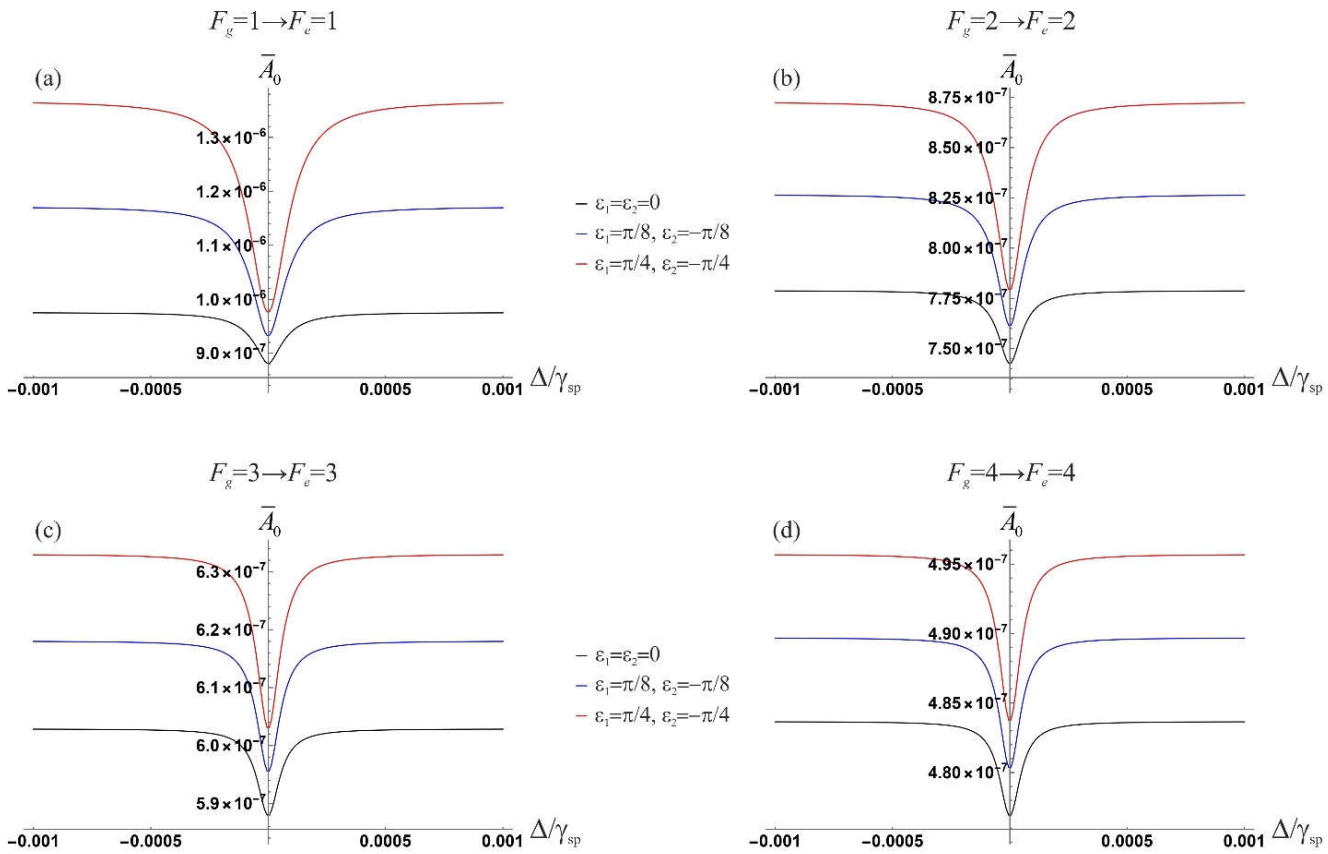

Рисунок 2.3 – Зависимость сигнала $\bar{A}_0$ (2.19) от разности частот волн $\Delta \equiv \omega_2 - \omega_1$ (в единицах γ_{sp}) в модели со спонтанным переносом анизотропии из возбужденного состояния в основное для частных случаев переходов $F_g = F \to F_e = F$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (черные линии), $\varepsilon_1 = \pi/8,\ \varepsilon_2 = -\pi/8$ (синие линии) и $\varepsilon_1 = \pi/4,\ \varepsilon_2 = -\pi/4$ (красные линии). Другие параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01\gamma_{sp}$, $\omega_D = 52\gamma_{sp}$, $\gamma_{opt} = 0.5\gamma_{sp}$, $\Gamma = 0.5 \cdot 10^{-4}\gamma_{sp}$, $\delta = 0$, $\phi = 0$.

Однако, если спонтанный перенос анизотропии отсутствует (2.15), резонансы для переходов $F_g = 1 \to F_e = 2$ (рисунок 2.6(a)), $F_g = 2 \to F_e = 3$ (рисунок 2.6(b)), $F_g = 3 \to F_e = 4$ (рисунок 2.6(c)), и $F_g = 4 \to F_e = 5$ (рисунок 2.6(d)) уже направлены вниз (по сравнению с резонансами на рисунке 2.5), то есть формируются ЭИП резонансы. Таким образом, эллиптичность волн не влияет на знак сверхузкого резонанса в двухчастотной конфигурации светового поля для сильных интенсивностей волн, и этот знак определяется только значениями угловых

моментов F_g и F_e. При этом формирование резонанса ЭИА связано со спонтанным переносом анизотропии из возбужденного состояния в основное.

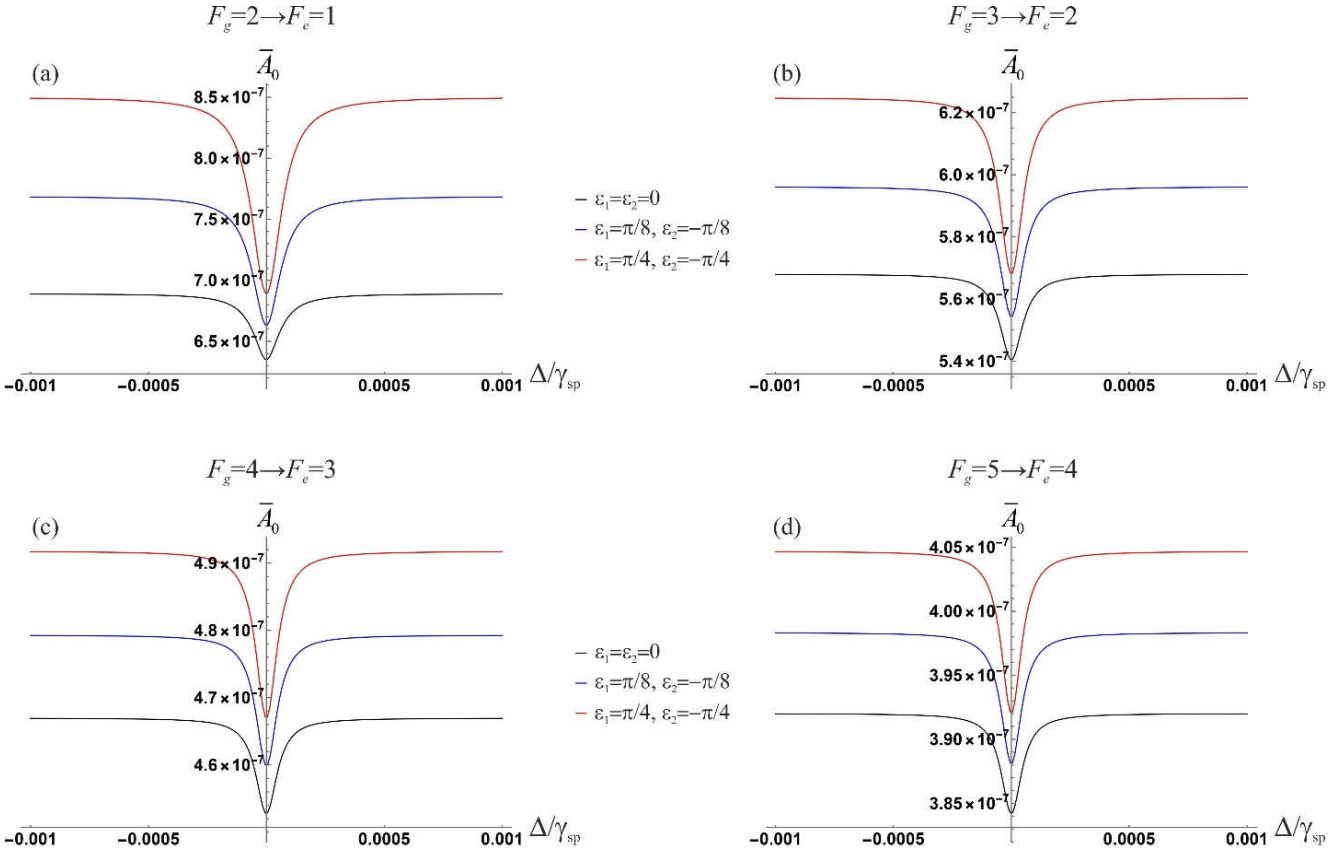

Рисунок 2.4 – Зависимость сигнала $\bar{A}_0$ (2.19) от разности частот волн $\Delta \equiv \omega_2 - \omega_1$ (в единицах γ_{sp}) в модели со спонтанным переносом анизотропии из возбужденного состояния в основное для частных случаев переходов $F_g = F \to F_e = F - 1$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (черные линии), $\varepsilon_1 = \pi/8,\ \varepsilon_2 = -\pi/8$ (синие линии) и $\varepsilon_1 = \pi/4,\ \varepsilon_2 = -\pi/4$ (красные линии). Другие параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01\gamma_{sp}$, $\omega_D = 52\gamma_{sp}$, $\gamma_{opt} = 0.5\gamma_{sp}$, $\Gamma = 0.5 \cdot 10^{-4}\gamma_{sp}$, $\delta = 0$, $\phi = 0$.

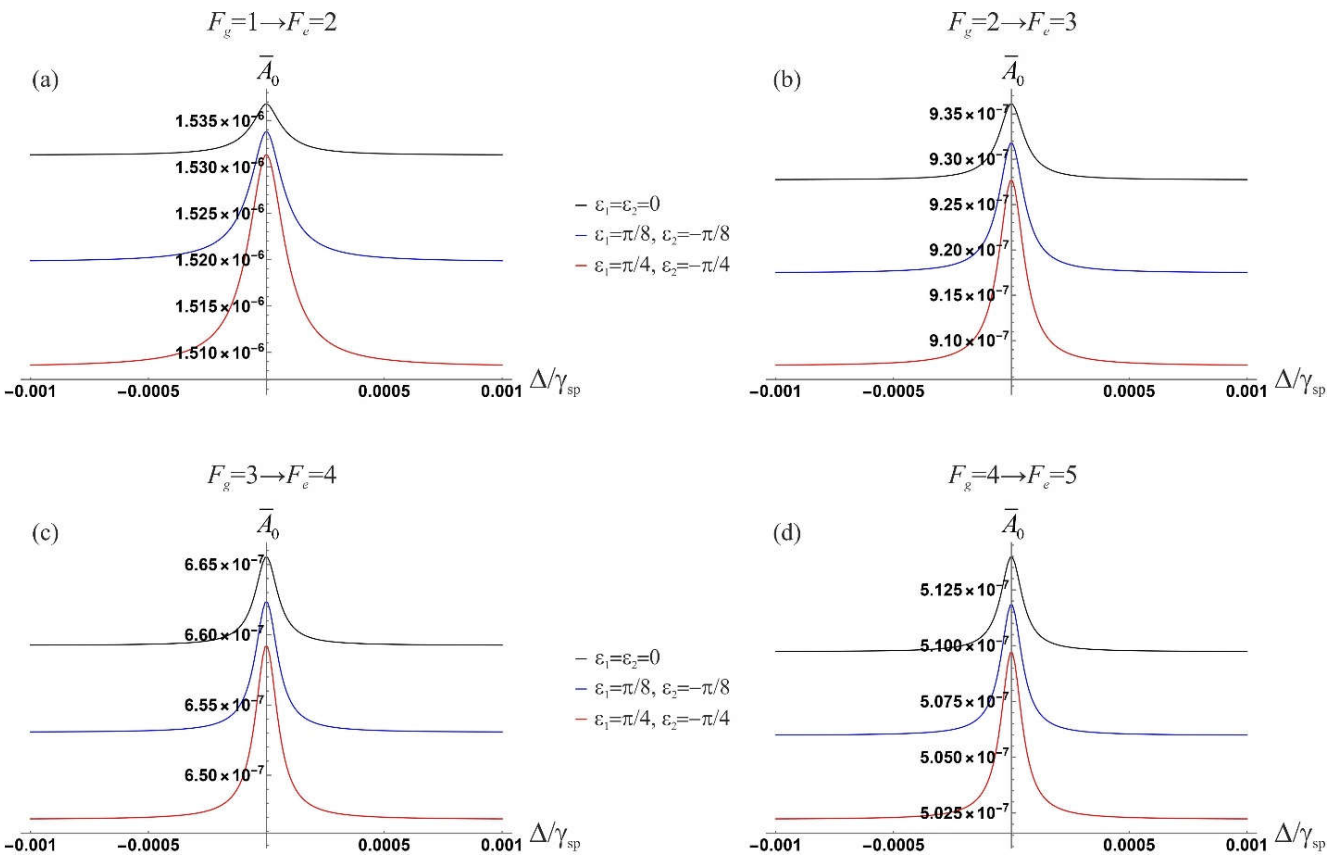

Рисунок 2.5 – Зависимость сигнала $\bar{A}_0$ (2.19) от разности частот волн $\Delta \equiv \omega_2 - \omega_1$ (в единицах γ_{sp}) в модели со спонтанным переносом анизотропии из возбужденного состояния в основное для частных случаев переходов $F_g = F \to F_e = F + 1$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (черные линии), $\varepsilon_1 = \pi/8,\ \varepsilon_2 = -\pi/8$ (синие линии) и $\varepsilon_1 = \pi/4,\ \varepsilon_2 = -\pi/4$ (красные линии). Другие параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01\gamma_{sp}$, $\omega_D = 52\gamma_{sp}$, $\gamma_{opt} = 0.5\gamma_{sp}$, $\Gamma = 0.5 \cdot 10^{-4}\gamma_{sp}$, $\delta = 0$, $\phi = 0$.

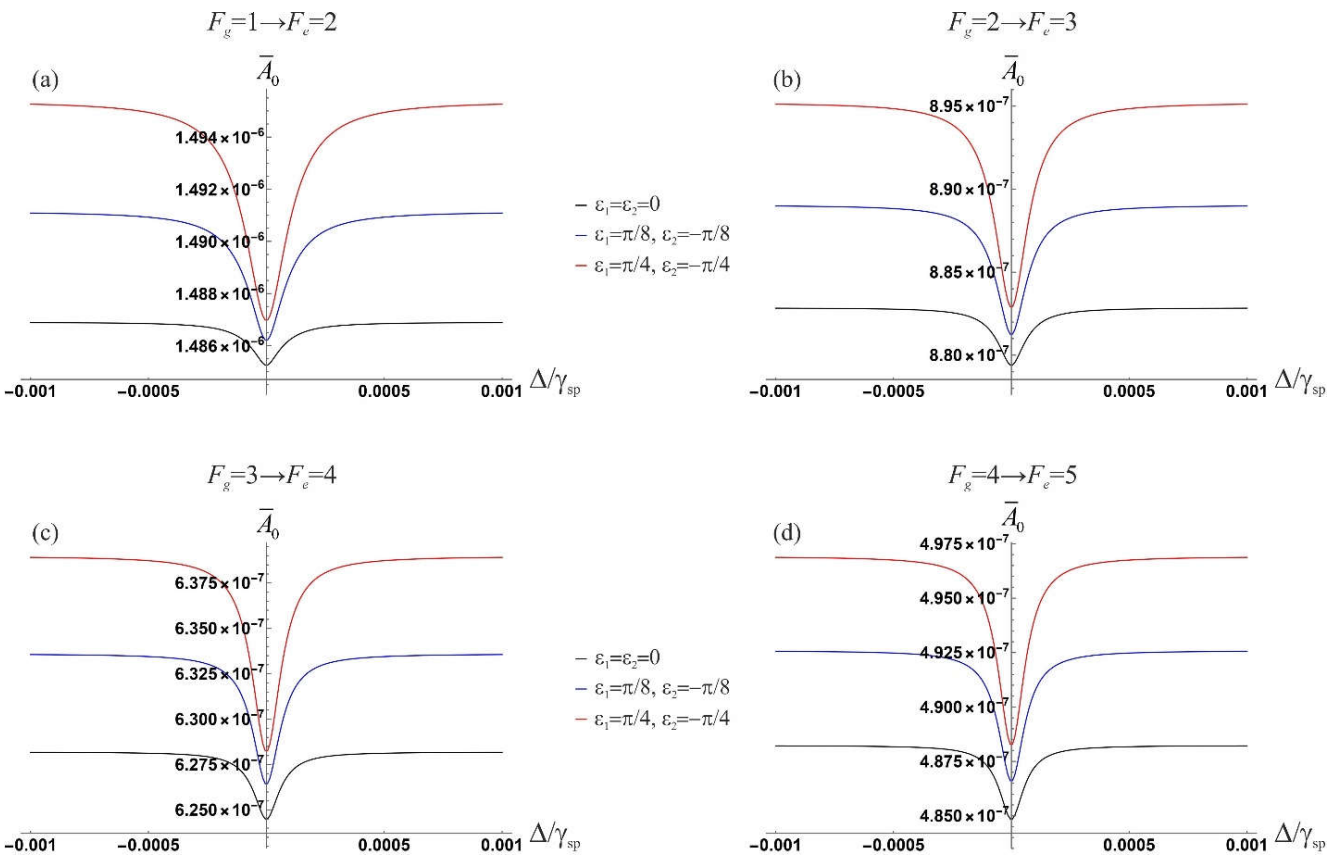

Рисунок 2.6 – Зависимость сигнала $\bar{A}_0$ (2.19) от разности частот волн $\Delta \equiv \omega_2 - \omega_1$ (в единицах γ_{sp}) в модели без спонтанного переноса анизотропии из возбужденного состояния в основное для частных случаев переходов $F_g = F \to F_e = F + 1$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (черные линии), $\varepsilon_1 = \pi/8,\ \varepsilon_2 = -\pi/8$ (синие линии) и $\varepsilon_1 = \pi/4,\ \varepsilon_2 = -\pi/4$ (красные линии). Другие параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01\gamma_{sp}$, $\omega_D = 52\gamma_{sp}$, $\gamma_{opt} = 0.5\gamma_{sp}$, $\Gamma = 0.5 \cdot 10^{-4}\gamma_{sp}$, $\delta = 0$, $\phi = 0$.

Глава 3
Оптимизация режимов стабилизации частоты в атомных часах на основе эффекта когеренетного пленения населенностей (КПН)

3.1 Теоретическая модель

В качестве модели рассмотрим резонанс когерентного пленения населенностей (также называемый темным резонансом), который формируется в трехуровневой Λ-системе энергетических уровней под действием резонансного двухчастотного (бихроматического) поля:

$$E(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + \text{к.с.}, \tag{3.1}$$

где E_1, E_2 есть амплитуды поля. Этот резонанс возникает при условии, когда разность оптических частот резонансных полей $(\omega_1 - \omega_2)$ сканируется вблизи частоты перехода между нижними энергетическими уровнями Λ-системы $|1\rangle$ и $|2\rangle$, то есть $(\omega_1 - \omega_2) \approx \Delta$ (см. рисунок 3.1).

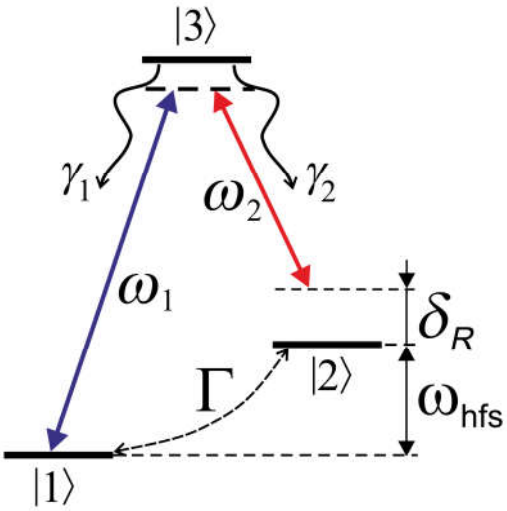

Рисунок 3.1 – Схема трехуровневой Λ-системы. Здесь ω_1 и ω_2 есть частоты резонансных оптических полей; γ_1, γ_2 и есть скорости спонтанного распада населенности из состояния $|3\rangle$ на состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$, соответственно. Γ – скорость распада когерентности между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$.

Атомная среда предполагается достаточно разреженной, что позволяет пренебречь эффектами межатомного взаимодействия и решать задачу в одноатомном приближении. Рассматривается модель неподвижных атомов. Для газовой среды такая модель является адекватной, когда столкновительное уширение оптических переходов буферным газом превышает доплеровскую ширину линии.

Математическое описание взаимодействия атомов с полем будем проводить на основе формализма атомной матрицы плотности $\hat{\rho}(t)=\sum_{j,k}|j\rangle\rho_{jk}(t)\langle k|$, удовлетворяющей следующему операторному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}+\hat{\Gamma}_{\text{sp}}\{\hat{\rho}\}+\hat{\Gamma}_{\text{opt}}\{\hat{\rho}\}+\hat{\Gamma}_{\text{i}}\{\hat{\rho}\}=-\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_0,\hat{\rho}]-\frac{i}{\hbar}[\hat{V},\hat{\rho}], \tag{3.2}$$

где $\hat{H}_0$ – гамильтониан невозмущенного атома:

$$\hat{H}_0=\mathcal{E}_1|1\rangle\langle 1|+\mathcal{E}_2|2\rangle\langle 2|+\mathcal{E}_3|3\rangle\langle 3|, \tag{3.3}$$

$\mathcal{E}_m$ – энергия m-го состояния (см. рисунок 3.1); $\hat{V}=-(\hat{d}E)$ есть оператор взаимодействия атомов с полем (здесь $\hat{d}$ – оператор электрического дипольного момента), который в резонансном приближении имеет вид

$$\hat{V}=-d_{31}E_1e^{-i\omega_1 t}|3\rangle\langle 1|-d_{32}E_2e^{-i\omega_2 t}|3\rangle\langle 2|+\text{э.с.}, \tag{3.4}$$

d_{31} и d_{32} – матричные элементы оператора электрического дипольного момента $\hat{d}$; оператор $\hat{\Gamma}_{\text{sp}}\{\hat{\rho}\}$ описывает спонтанную релаксацию возбужденного состояния $|3\rangle$:

$$\hat{\Gamma}_{\text{sp}}\{\hat{\rho}\}=-\rho_{33}\left(\gamma_1|1\rangle\langle 1|+\gamma_2|2\rangle\langle 2|\right)+\gamma_{\text{sp}}\rho_{33}|3\rangle\langle 3|, \tag{3.5}$$

оператор $\hat{\Gamma}_{\text{opt}}\{\hat{\rho}\}$ определяет затухание оптических когерентностей:

$$\hat{\Gamma}_{\text{opt}}\{\hat{\rho}\}=\gamma_{\text{opt}}\left(\rho_{13}|1\rangle\langle 3|+\rho_{23}|2\rangle\langle 3|+\rho_{31}|3\rangle\langle 1|+\rho_{32}|3\rangle\langle 2|\right), \tag{3.6}$$

оператор $\hat{\Gamma}_i\{\hat{\rho}\}$ отвечает за релаксацию атомов к изотропному распределению по нижним энергетическим уровням $|1\rangle$ и $|2\rangle$:

$$\hat{\Gamma}_i\{\hat{\rho}\}=\Gamma\left[\hat{\rho}-\frac{1}{2}\text{Tr}\{\hat{\rho}\}\left(|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|\right)\right], \tag{3.7}$$

где постоянные $\gamma_{\text{sp}} = \gamma_1 + \gamma_2$ (γ_1 и γ_2 есть скорости спонтанного распада населенности из состояния $|3\rangle$ на состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$, соответственно), γ_{opt} и Γ – скорости соответствующих релаксационных процессов. Подставляя выражения (3.3) – (3.7) в уравнение (3.2), и исключая из недиагональных элементов матрицы плотности быстрые осцилляции:

$$\rho_{31} = \tilde{\rho}_{31} e^{-i\omega_1 t},\ \rho_{32} = \tilde{\rho}_{32} e^{-i\omega_2 t},\ \rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}, \tag{3.8}$$

получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_{11} = -\Gamma\left(\rho_{11} - \dfrac{1}{2}\right) + \gamma_1 \rho_{33} + i(\Omega_1^* \tilde{\rho}_{31} - \tilde{\rho}_{13}\Omega_1), \\ \partial_t \rho_{22} = -\Gamma\left(\rho_{22} - \dfrac{1}{2}\right) + \gamma_2 \rho_{33} + i(\Omega_2^* \tilde{\rho}_{32} - \tilde{\rho}_{23}\Omega_2), \\ \partial_t \rho_{33} = -(\gamma_{\text{sp}} + \Gamma)\rho_{33} + i(\Omega_1 \rho_{13} - \rho_{31}\Omega_1^*) + i(\Omega_2 \rho_{23} - \rho_{32}\Omega_2^*), \\ \partial_t \tilde{\rho}_{21} = -(\Gamma + i\delta_{\text{R}})\tilde{\rho}_{21} + i(\Omega_2^* \tilde{\rho}_{31} - \tilde{\rho}_{23}\Omega_1), \\ \partial_t \rho_{31} = -[\gamma_{\text{opt}} + i(\delta_{\text{1-ph}} + \delta_R / 2)]\tilde{\rho}_{31} + i\Omega_1(\rho_{11} - \rho_{33}) + i\Omega_2 \tilde{\rho}_{21}, \\ \partial_t \tilde{\rho}_{32} = -[\gamma_{\text{opt}} + i(\delta_{\text{1-ph}} - \delta_R / 2)]\tilde{\rho}_{32} + i\Omega_2(\rho_{22} - \rho_{33}) + i\Omega_1 \tilde{\rho}_{12}, \\ \tilde{\rho}_{12} = \tilde{\rho}_{21}^*, \quad \tilde{\rho}_{13} = \tilde{\rho}_{31}^*, \quad \tilde{\rho}_{23} = \tilde{\rho}_{32}^*, \\ \text{Tr}[\hat{\rho}] = \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

где $\Omega_1 = d_{31}E_1 / \hbar$ и $\Omega_2 = d_{32}E_2 / \hbar$ есть частоты Раби для переходов $|1\rangle \to |3\rangle$ и $|2\rangle \to |3\rangle$, соответственно; $\delta_1 = \omega_1 - \omega_{31}$ и $\delta_2 = \omega_2 - \omega_{32}$ – однофотонные отстройки волн бихроматического лазерного поля; $\delta_{\text{1-ph}} = (\delta_1 + \delta_2)/2$ – эффективная однофотонная отстройка; $\delta_{\text{R}} = \delta_1 - \delta_2 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{\text{hfs}}$ – двух-фотонная (рамановская) отстройка.

В качестве спектроскопического сигнала будем рассматривать поглощенную мощность излучения, которая в приближении оптически тонкой среды пропорциональна следующей величине:

$$A(t) = -2\,\text{Im}\{\Omega_1 \tilde{\rho}_{13} + \Omega_2 \tilde{\rho}_{23}\} = \left[\partial_t + \gamma_{\text{sp}} + \Gamma\right]\rho_{33}. \tag{3.10}$$

В стационарных условиях эта величина с точностью до коэффициента совпадает с населенностью возбужденного состояния, $A_{\text{st}} = (\gamma_{\text{sp}} + \Gamma)\rho_{33}$, а ее зависимость

$A_{\mathrm{st}}(\delta_{\mathrm{R}})$ описывает хорошо известную форму линии темного резонанса как функцию от двух-фотонной отстройки δ_{R}, которая, как показано в работе [61], имеет вид обобщенного лоренциана (при $|\delta_{\mathrm{R}}| \ll \gamma_{\mathrm{opt}}$):

$$A_{\mathrm{st}}(\delta_{\mathrm{R}}) = C_0 + C_1 \frac{\tilde{\gamma}^2}{(\delta_R - \delta_0)^2 + \tilde{\gamma}^2} + C_2 \frac{(\delta_R - \delta_0)\tilde{\gamma}}{(\delta_R - \delta_0)^2 + \tilde{\gamma}^2}, \tag{3.11}$$

где величины C_0, C_1, C_2, $\tilde{\gamma}$ и δ_0 зависят от параметров модели (Ω_1, Ω_2, $\delta_{\text{1-ph}}$, γ_{sp}, γ_{opt}, Γ). В случае $\delta_{\text{1-ph}} = 0$ имеет место симметричный лоренцевский контур, когда $C_2 = 0$ и $\delta_0 = 0$.

3.2 Формирование сигнала ошибки

На практике стабилизация частоты в атомных часах вблизи резонансной частоты ω_{hfs} осуществляется не по вершине резонанса, а по положению нуля сигнала ошибки [39], который может быть сформирован с помощью частотной или фазовой модуляции бихроматического поля. В случае гармонической частотной модуляции выражение для двух-фотонной отстройки имеет следующий вид:

$$\delta_{\mathrm{R}}(t) = \delta^{(0)} + F\cos(f_m t) = \delta^{(0)} + M f_m \cos(f_m t), \tag{3.12}$$

где $\delta^{(0)}$ – постоянная составляющая двух-фотонной отстройки, f_m и F – частота и глубина модуляции, соответственно, а $M = F/f_m$ есть индекс модуляции. В этом случае спектроскопический сигнал (3.10) становится периодически зависящим от времени $A(t+T) = A(t)$ с периодом $T = 2\pi/f_m$, как было показано в первой главе. Для формирования сигнала ошибки $S_{\mathrm{err}}(\delta^{(0)})$ применяется техника синхронного детектирования с опорным сигналом, что математически может быть записано как

$$S_{\mathrm{err}}(\delta^{(0)}) = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\cos\left(f_m t + \phi\right)dt, \tag{3.13}$$

где $\cos(f_m t + \phi)$ – опорный сигнал, ϕ – фаза опорного сигнала относительно сигнала модуляции. При $\phi = 0$ сигнал ошибки является синфазным $S_{\text{in-ph}}(\delta^{(0)})$, а для $\phi = -\pi / 2$ – квадратурным $S_{\text{quad}}(\delta^{(0)})$:

$$S_{\text{in-ph}}(\delta^{(0)}) = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\cos(f_m t)dt, \quad S_{\text{quad}}(\delta^{(0)}) = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\sin(f_m t)dt. \tag{3.14}$$

Тогда выражение (3.15) может быть представлено в виде следующей суперпозиции:

$$S_{\text{err}}(\delta^{(0)}) = \cos(\phi)S_{\text{in-ph}}(\delta^{(0)}) - \sin(\phi)S_{\text{quad}}(\delta^{(0)}). \tag{3.15}$$

На качественном уровне представление о сигнале ошибок можно получить, используя под интегралом (3.13) выражение для стационарного сигнала $A_{\text{st}}(\delta_{\text{R}})$ (см. выражение (3.11)), проведя при этом формальную замену $\delta_{\text{R}} \to \delta^{(0)} + F\cos(f_m\, t)$, то есть полагая, что $A(t) \approx A_{\text{st}}(\delta^{(0)} + F\cos(f_m\, t))$. Однако такой квазистационарный подход корректен только для малых частот модуляции f_m. В общем же случае необходимо находить динамическое периодическое решение системы уравнений (3.9).

3.3 Оптимизация отношения сигнал/шум

Типичный вид сигнала ошибки (3.13) представлен на рисунке 3.3 и имеет форму дисперсионной кривой. Одной из главных характеристик, определяющих кратковременную стабильность атомных часов, является наклон сигнала ошибки в центре линии (см. рисунок 3.3):

$$K = \tan(\alpha) = \left.\frac{\partial S_{\text{err}}}{\partial \delta^{(0)}}\right|_{\delta^{(0)}=0}. \tag{3.16}$$

Учитывая выражение (3.16), наклон K можно представить в виде суперпозиции:

$$K = \cos(\phi)K_{\text{in-ph}} - \sin(\phi)K_{\text{quad}}, \tag{3.17}$$

где $K_{\text{in-ph}}$ и K_{quad} есть наклоны сигналов ошибки $S_{\text{in-ph}}(\delta^{(0)})$ и $S_{\text{quad}}(\delta^{(0)})$, соответственно.

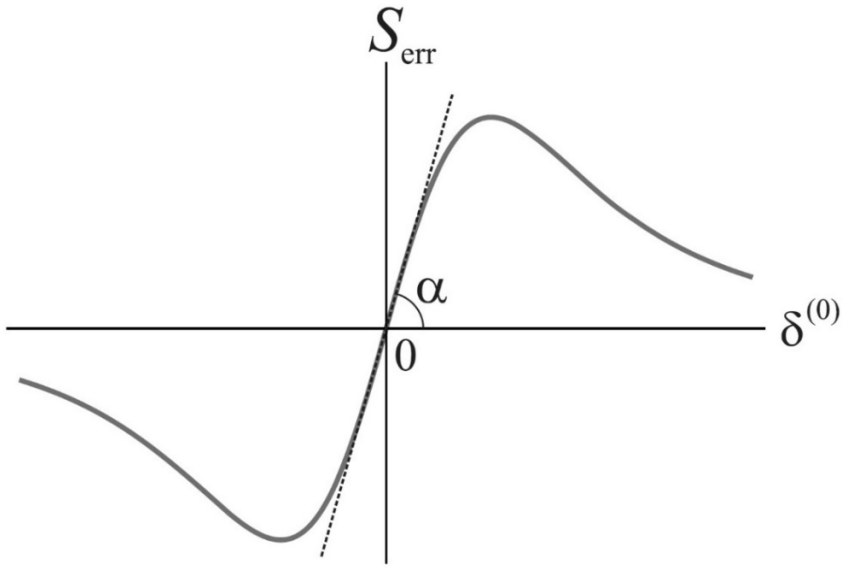

Рисунок 3.2 – Схематическое изображение зависимости сигнала ошибки S_{err} от постоянной составляющей двух-фотонной (рамановской) отстройки $\delta^{(0)}$.

Для анализа проводимых расчетов, выведем критерии для адиабатического и динамического откликов атомной среды, возбуждаемой полем с гармонической частотной модуляцией. Если предположить, что полуширина КПН-резонанса $\tilde{\gamma}$ в выражении (3.11) соответствует минимальной скорости затухания в Λ-системе, тогда можно сформулировать критерий квазистационарного (адиабатического) режима следующим образом:

$$\frac{F f_m}{\tilde{\gamma}^2} \ll 1. \tag{3.18}$$

Действительно, рассмотрим вначале условие $F \gg \tilde{\gamma}$. В этом случае, типичное время сканирования $\overline{t}$ полуширины $\tilde{\gamma}$ во временной области $\left|F\cos(f_m t)\right| < \tilde{\gamma}$ (для $\delta^{(0)} = 0$) может быть приближенно определено из соотношения: $F f_m \overline{t} \approx \tilde{\gamma}$. Тогда, квазистационарный режим соответствует условию: $\overline{t} \gg 1/\tilde{\gamma}$, то есть сканирующее время $\overline{t}$ должно быть намного больше, чем максимальное время затухания в Λ-системе, $1/\tilde{\gamma}$. Используя, оба этих выражения ($F f_m \overline{t} \approx \tilde{\gamma}$ и $\overline{t} \gg 1/\tilde{\gamma}$), получаем неравенство (3.18). Если рассмотреть другое условие $F \sim \tilde{\gamma}$, тогда квазистационарный режим соответствует очевидному соотношению: $f_m \ll \tilde{\gamma}$.

Используя эти выражения ($F \sim \tilde{\gamma}$ и $f_m \ll \tilde{\gamma}$), снова получаем тоже самое неравенство (3.18). Таким образом, формула (3.18) является вполне универсальным критерием для адиабатического режима. В то же время, другое неравенство:

$$\frac{F f_m}{\tilde{\gamma}^2} \gtrsim 1. \tag{3.19}$$

может использоваться как критерий динамического (нестационарного) режима для атомной системы, возбуждаемой частотной модуляцией (3.12).

На рисунке 3.3 представлена временная развертка спектроскопического сигнала $A(t)$ (см. выражение (3.10)) при различных частотах модуляции f_m, для расчета которой применялся метод нахождения динамического стационарного состояния для матрицы плотности, подробно изложенный в первой главе настоящей диссертации. Как видно из первого рисунка 3.3(а), в случае малой частоты модуляции f_m временная развертка сигнала имеет обычный вид темного резонанса как функции двух-фотонной отстройки в стационарном режиме, то есть $A(t) \approx A_{\mathrm{st}}(\delta^{(0)} + F\cos(f_m t))$. Однако по мере увеличения f_m сигнал $A(t)$ сильно искажается, становясь существенно несимметричным и с элементами осцилляций (см. рисунок 3.3(б–д)), пока, наконец, не принимает вид регулярной гармонической формы (см. рисунок 3.3(е)), фаза которой существенно отличается от исходной фазы задающего гармонического закона (3.12). Полученные зависимости свидетельствуют о том, что стандартное представление о темном резонансе, который описывается простым резонансным контуром (3.11), является малоинформативным для анализа динамического режима модуляции частоты. Следует также отметить, что полученные расчеты на рисунке 2.3 подтверждают критерии (3.18) и (3.19) для квазистационарного и динамического режимов. Действительно, для выбранных параметров поля полуширина стационарного темного резонанса $\tilde{\gamma}$ приближенно равна 2Γ. Тогда для рисунка 3.3(а) получаем $F f_m / \tilde{\gamma}^2 \approx 0.05$, что хорошо соответствует квазистационарному критерию (3.18), в то время как для рисунка 3.3(б–е) значение этого отношения $F f_m / \tilde{\gamma}^2 \gtrsim 1$ соответствует уже динамическому критерию (3.19).

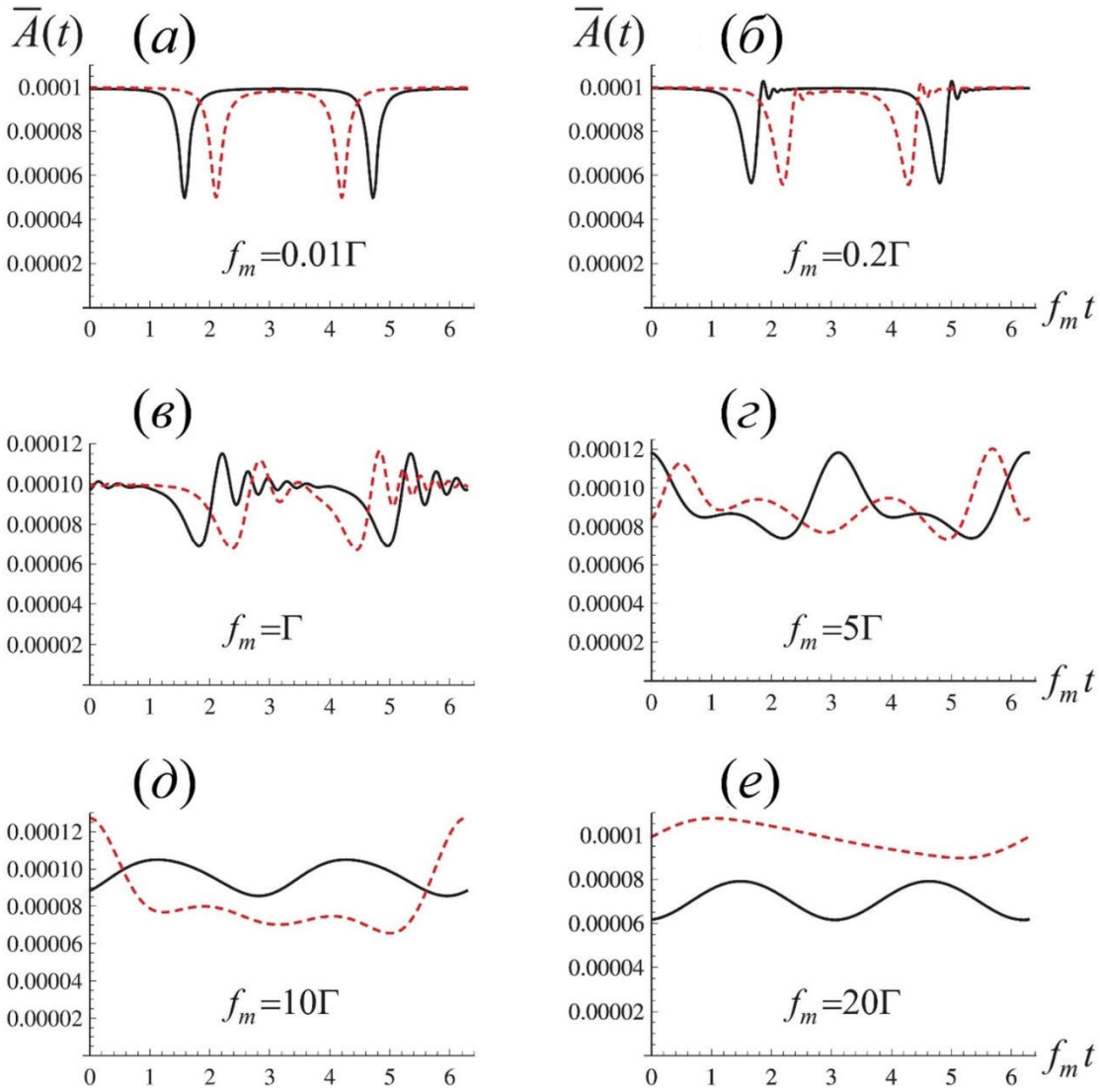

Рисунок 3.3 – Временная развертка нормированного сигнала $\overline{A}(t) = A(t)/(\gamma_{\text{sp}} + \Gamma)$ на одном периоде $(0 \le f_m t \le 2\pi)$ в случае гармонической частотной модуляции (3.12) при $F = 20\Gamma$, для двух значений постоянной составляющей двух-фотонной отстройки $\delta^{(0)} = 0$ (сплошная черная линия) и $\delta^{(0)} = 10\Gamma$ (пунктирная красная линия), и различных значений частоты девиации f_m: $f_m/\Gamma = 0.01; 0.2; 1; 5; 10; 20$ (см. (*a*)–(*e*)). Численные параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.05\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{sp}}/2$, $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma = 10^{-4}\gamma_{\text{sp}}$, $\delta_{\text{1-ph}} = 0$.

На рисунке 3.4(а) показана зависимость наклона K от параметров модуляции F и f_m для синфазного сигнала ошибки, то есть при $\phi = 0$. Видно, в этом случае максимальный наклон наблюдается вблизи $F \sim 1.5\Gamma$ (для выбранных параметров поля и констант релаксации) и при малых частотах модуляции ($f_m < 2\Gamma$), которые

соответствуют квазистационарному режиму возбуждения атомной системы. На рисунке 3.4(б) построена зависимость K для квадратурного сигнала ошибки, при $\phi = -\pi / 2$. Здесь, наоборот, максимальный наклон наблюдается для относительно высоких значений частот f_m и амплитуд F модуляции ($f_m \gtrsim 2\Gamma$), что соответствует существенно динамическому режиму возбуждения атомной системы. Еще одной интересной особенностью квадратурного сигнала является явное наличие областей с противоположным знаком K (красные и синие области на рисунке 3.4(б)). Демонстрация этого эффекта представлена на рисунке 3.5, где показаны сигналы ошибок с противоположным знаком наклона, а также сигнал ошибок для переходной зоны с горизонтальным наклоном ($K = 0$). Следует отметить, что смена знака наклона K имеет место и для синфазного сигнала (темная область в верхней части рисунка 3.4(а)). Однако в этом случае эффект является невыразительным, так как с ростом f_m синфазный сигнал становится весьма слабым.

Наклон сигнала ошибки $|K|$ можно максимизировать выбором оптимальной фазы $\phi = \phi_{\text{opt}}$ опорного сигнала. Используя выражение (3.19), находим оптимальную фазу ϕ_{opt} и соответствующий ей наклон $|K|_{\text{opt}}$:

$$|K|_{\text{opt}} = \sqrt{K_{\text{in-ph}}^2 + K_{\text{quad}}^2}, \qquad \phi_{\text{opt}} = -\text{arctg}(K_{\text{quad}} / K_{\text{in-ph}}), \tag{3.20}$$

Расчеты данной оптимизации представлены на рисунке 3.6. Так на рисунках 3.6(а) и 3.6(б) показаны зависимости максимального наклона $|K|_{\text{opt}}$ в плоскостях (F, f_m) и (M, f_m), соответственно. Соответствующие графики для оптимальной фазы ϕ_{opt} показаны на рисунках 3.6(в) и 3.6(г).

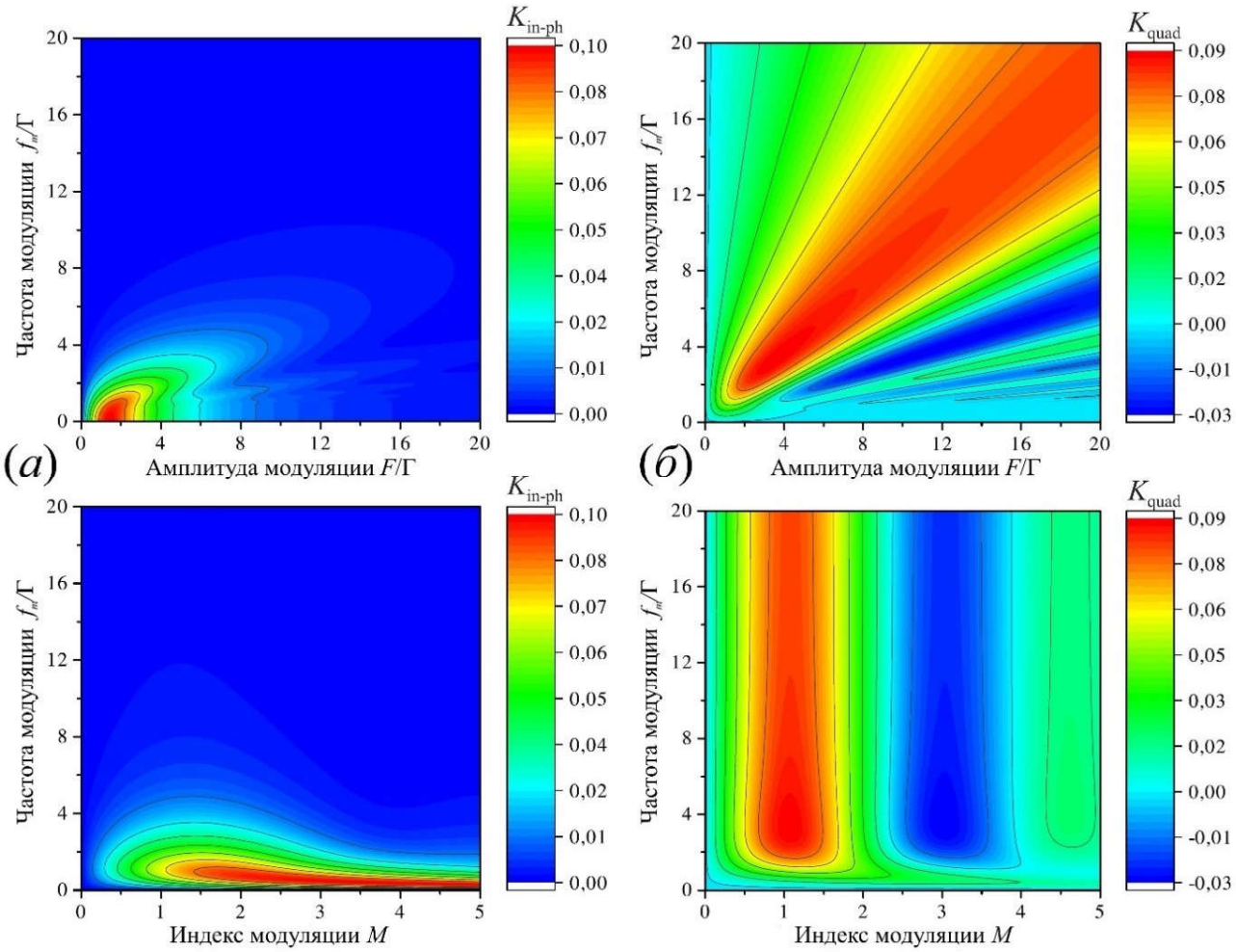

Рисунок 3.4 – (а) Зависимость наклона синфазного сигнала ошибки $(\phi = 0)$ в плоскости параметров (F, f_m) и (M, f_m), (б) Зависимость наклона квадратурного сигнала ошибки $(\phi = -\pi / 2)$ в плоскости параметров (F, f_m) и (M, f_m). Численные параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.05\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{sp}} / 2$, $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma = 10^{-4}\gamma_{\text{sp}}$, $\delta_{\text{1-ph}} = 0$.

Полученные расчеты показывают, что для высоких частот модуляции $(f_m > 2\Gamma)$ оптимальный наклон наблюдается для квадратурного сигнала ошибки $(\phi_{\text{opt}} \approx -\pi / 2)$ (главный «хребет» на рисунке 3.6(б) с $M_{\text{opt}} \approx 1.1$ и соответствующая синяя область на рисунках 3.6(в) и 3.6(г)). Данный режим представляет собой аналог для двух-фотонного резонанса метода стабилизации Паунда-Древера-Холла [110, 111]. Однако максимальная величина $|K|_{\max} = \max\{|K|_{\text{opt}}\}$ достигается при частоте модуляции $f_{m\ \text{opt}} \approx 1.55\Gamma$, равной 3/4 от полуширины КПН-резонанса на полувысоте (оцененной в квазистационарном режиме), индексе модуляции

$M_{\text{opt}} \approx 1.3$ (соответствует амплитуде частотной модуляции F_{opt}, равной полуширине $\tilde{\gamma} \approx 2\Gamma$ КПН-резонанса), и при оптимальной фазе $\phi_{\text{opt}} \approx -\pi / 4$. Таким образом, оптимальный режим стабилизации, при котором достигается $|K|_{\max}$, находится в промежуточной области между синфазным $(\phi = 0)$ и квадратурным $(\phi = -\pi / 2)$ сигналами ошибки. Оптимальные параметры модуляции соответствуют динамическому режиму взаимодействия атомов с полем: $F_{\text{opt}} f_{m\ \text{opt}} / \tilde{\gamma}^2 = 2\Gamma \cdot 1.55\Gamma / (2\Gamma)^2 \approx 0.775 \approx 1$.

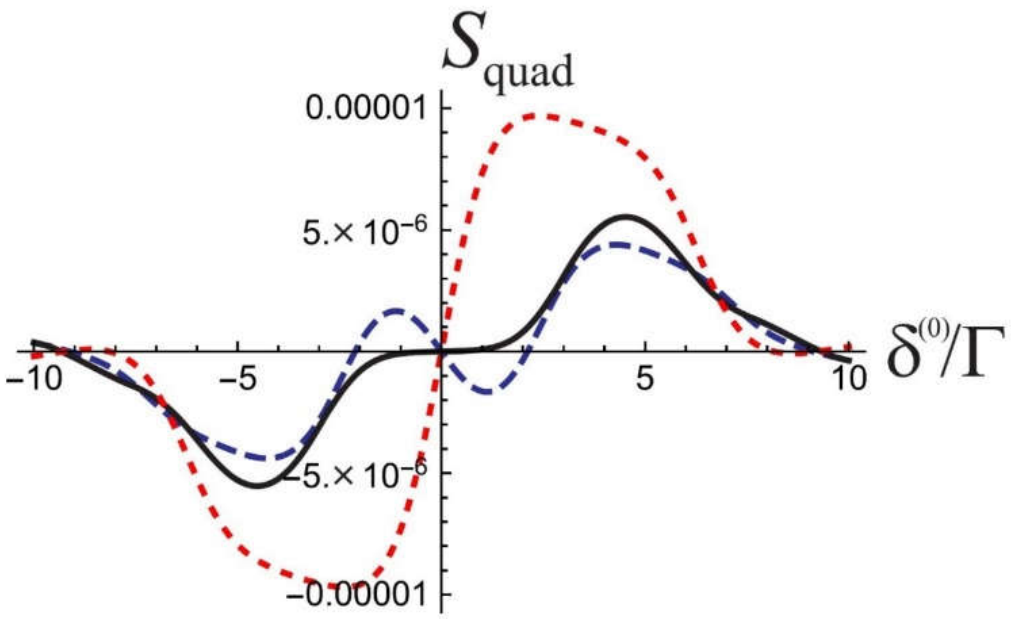

Рисунок 3.5 – Демонстрация смены знака наклона K для квадратурного сигнала ошибки $(\phi = -\pi / 2)$ при фиксированной амплитуде модуляции $F = 7\Gamma$ и для различных частот модуляции f_m: кривая с $K > 0$ (красная штрихпунктирная линия) при $f_m = 2.4\Gamma$, кривая с $K = 0$ (черная сплошная линия) при $f_m = 2.965\Gamma$, кривая с $K < 0$ (синяя штриховая линия) при $f_m = 6.3\Gamma$. Численные параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.05\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{sp}} / 2$, $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma = 10^{-4}\gamma_{\text{sp}}$, $\delta_{\text{1-ph}} = 0$.

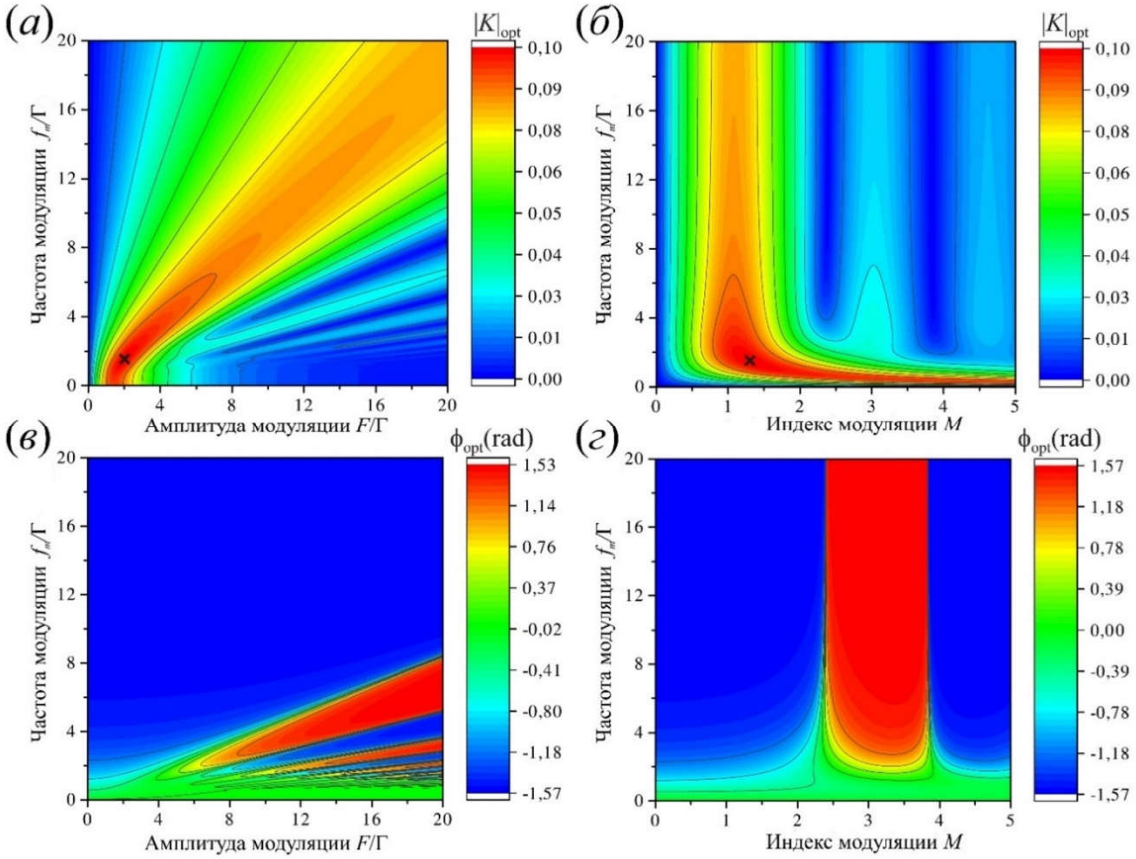

Рисунок 3.6 – Зависимость наклона сигнала ошибки $|K|_{\text{opt}}$ (*а*) в плоскости параметров (F, f_m), (*б*) в плоскости параметров (M, f_m), и соответствующей оптимальной фазы ϕ_{opt} опорного сигнала (*в*) в плоскости параметров (F, f_m), (*г*) в плоскости параметров (M, f_m). Положение максимального наклона отмечено крестиком. Численные параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.05\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{sp}}/2$, $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma = 10^{-4}\gamma_{\text{sp}}$, $\delta_{\text{1-ph}} = 0$.

Другой ключевой характеристикой, влияющей на стабильность атомных часов, является спектральная плотность шумов $N(f_m)$, которая определяется техническими особенностями конкретной экспериментальной установкой. Кратковременная стабильность стандарта частоты пропорциональна величине $|K|/N(f_m)$ [39]. В качестве модели низкочастотных шумов рассмотрим следующую:

$$N(f_m) = N_0(1 + f_0/f_m), \tag{3.21}$$

где $N_0 = N(f_m \to \infty)$ представляет собой спектральною плотность белого шума; f_0 – некоторый частотный параметр, связанный с так называемым фликкер-шумом

частоты (или шум $1/f$). На рисунке 3.7 показаны зависимости отношения $|K|_{\text{opt}}/\left[1+\left(f_0/f_m\right)\right]$ от параметров модуляции (M, f_m) для различных значений величины f_0, входящей в выражение для спектральной плотности шума (3.20). Из данных графиков видно, что значение оптимальной частоты модуляции f_m существенным образом зависит от f_0. Действительно, для $f_0 = 0.4\Gamma$ минимальное значение $f_m \approx 2\Gamma$, тогда как для случая $f_0 = 5\Gamma$ частоту модуляции необходимо выбирать $f_m \geq 45\Gamma$. Таким образом, с ростом f_0 оптимальное значение f_m смещается в высокочастотную область, причем эта зависимость имеет нелинейный характер. Ограничение сверху для f_m должно определяться исходя из технических особенностей (используемой элементной базой электронных узлов и их схем) конкретного устройства.

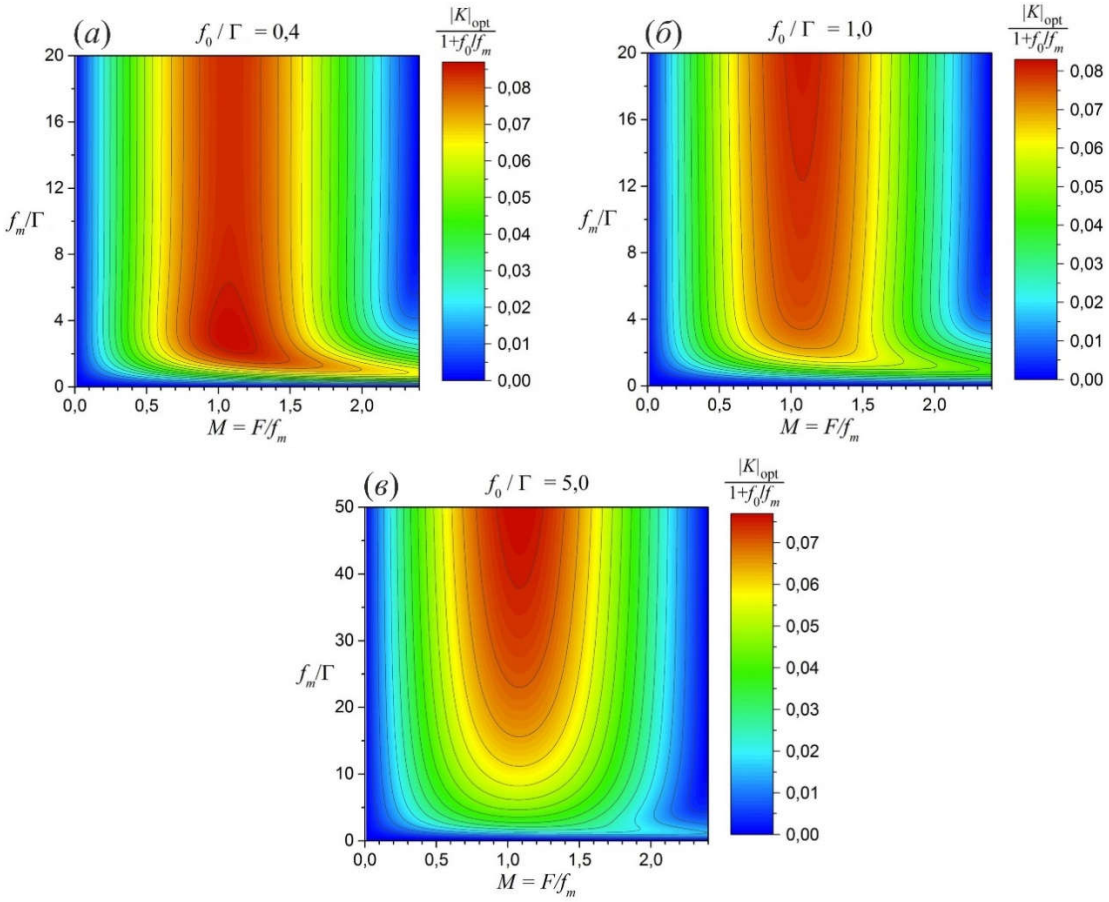

Рисунок 3.7 – Зависимость отношения $|K|_{\text{opt}}/\left[1+\left(f_0/f_m\right)\right]$ от индекса M и частоты f_m модуляции для (а) $f_0 = 0.4\Gamma$, (б) $f_0 = \Gamma$, (в) $f_0 = 5\Gamma$. Численные параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.05\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{sp}}/2$, $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma = 10^{-4}\gamma_{\text{sp}}$, $\delta_{\text{1-ph}} = 0$.

3.4 Сравнение с экспериментами

Полученные теоретические зависимости находятся в хорошем качественном согласии с различными экспериментами [68–70]. Индекс модуляции M в статьях [68, 69] соответствует половине ($M/2$) индекса модуляции $M = F/f_m$ в теоретической модели. Это связано с тем, что в экспериментах полупроводниковый лазер (VCSEL) модулируется на частоте 3.4 ГГц, что составляет половину частоты сверхтонкого расщепления ($\Delta \approx 6.8$ ГГц) основного состояния ^{87}Rb. В результате, в качестве резонансных полей в работах [68, 69] использовались две боковые гармоники (±1) с разностью частот 6.8 ГГц. На рисунке 3.8(а) представлены синфазный и квадратурный сигналы ошибок.

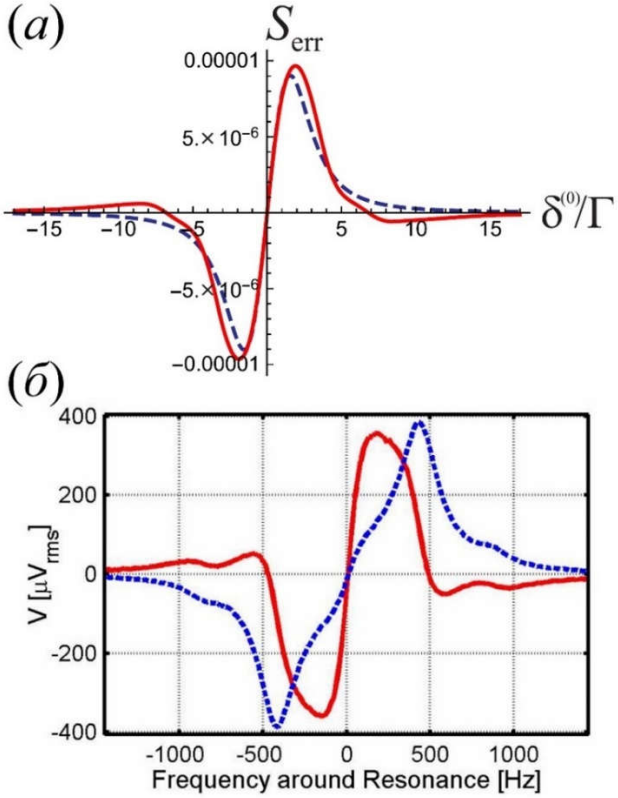

Рисунок 3.8 – (*а*) Расчетная зависимость синфазного сигнала ошибки $S_{\text{in-ph}}(\delta^{(0)})$ (пунктирная синяя линия для $\phi=0$, $F=1.4\Gamma$, $f_m=0.01\Gamma$) и квадратурного сигнала ошибки $S_{\text{quad}}(\delta^{(0)})$ (сплошная красная линия для $\phi=-\pi/2$, $F=3.6\Gamma$, $f_m=3.4\Gamma$). Численные параметры модели: $\Omega_1=\Omega_2=0.05\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_{\text{sp}}/2$, $\gamma_{\text{opt}}=50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma=10^{-4}\gamma_{\text{sp}}$, $\delta_{\text{1-ph}}=0$. (*б*) Экспериментальная зависимость синфазного (пунктирная синяя линия) и квадратурного (сплошная красная линяя) сигналов ошибки (Figure 2a из работы [68]).

Отметим, что здесь квадратурный сигнал ошибки содержит три точки пересечения с горизонтальной осью. Это находится в хорошем согласии с результатами [68], где квадратурный сигнал также имеет три точки пересечения с горизонтальной осью (см. рисунок 3.8(б)). Если теперь сравнить рисунки 3.6(б) и 3.9, то обнаруживается практически идентичный характер зависимости. Действительно, на обоих графиках помимо главного «хребта» (с максимальным наклоном) около $M \approx 1.1$ (см. рисунок 3.6(б)) ($M \approx 0.55$ на рисунке 3.9), проявляется следующий менее выразительный «хребет» около $M \approx 3$ (см. рисунок 3.6(б)) ($M \approx 1.5$ на рисунке 3.9). Отметим также, что рисунок 3.10(а) хорошо согласуется с рисунком 3.10(б).

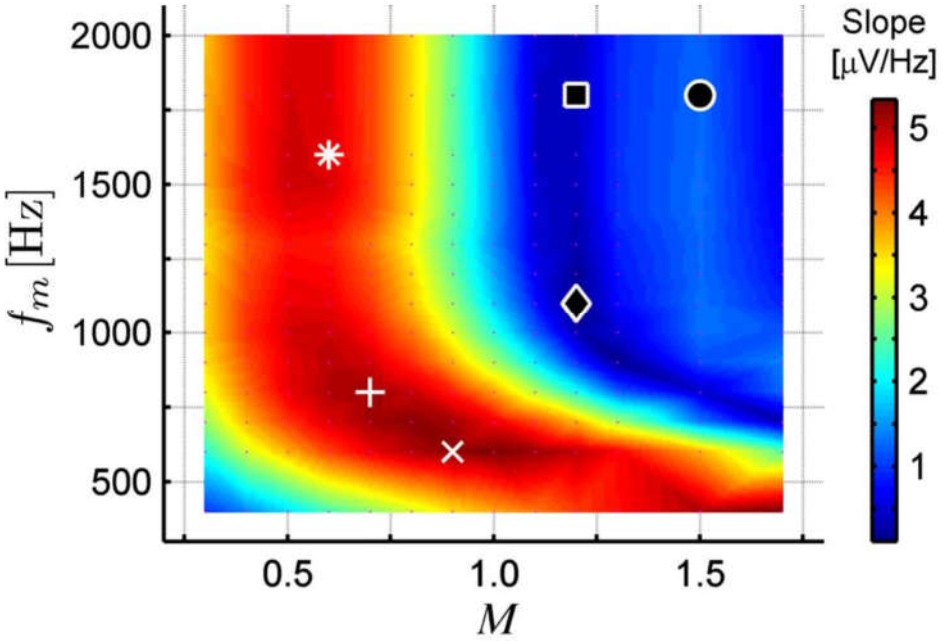

Рисунок 3.9 – Экспериментальная зависимость наклона сигнала ошибки от индекса M и частоты f_m модуляции (Figure 2a из работы [69]).

Детальность соответствия с различными экспериментами становится еще более очевидной, если сравнить положение максимального значения наклона $|K|_{\max}$ на рисунке 3.6 и в работах [69, 70]. Действительно, расчеты показывают (см. рисунок 3.6(б)), что максимальная величина $|K|_{\max}$ достигается для индекса модуляции $M \approx 1.3$ (для выбранных параметров поля и констант релаксаций). Для сравнения: в работе [69] указывается величина $M \approx 0.6$ ($M \approx 1.2$ для теоретической

модели), а в статье [70] содержится результат $M \approx 1.3$ (для $F = 4$ кГц и $f_m = 3$ кГц), который практически тождественен полученному численному расчету.

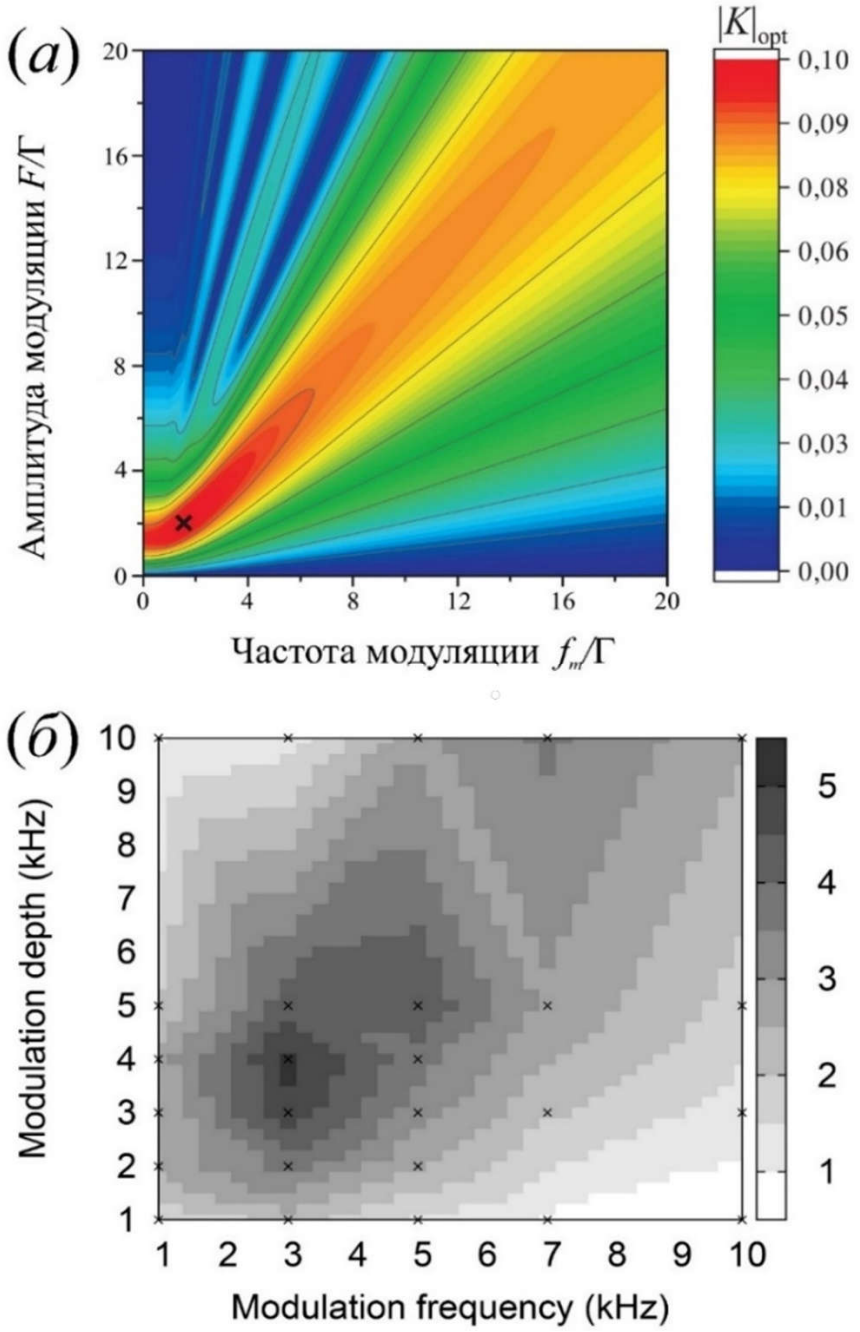

Рисунок 3.10 – (*а*) Расчетная зависимость наклона сигнала ошибки $|K|_{\text{opt}}$ от частоты f_m и амплитуды F модуляции. Положение максимального наклона отмечено крестиком. Численные параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.05\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{sp}}/2$, $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma = 10^{-4}\gamma_{\text{sp}}$, $\delta_{\text{l-ph}} = 0$. (*б*) Экспериментальная зависимость наклона сигнала ошибки от частоты и амплитуды модуляции (Figure 4 из работы [70]).

Следует отметить, что в численных расчетах использовалась достаточно простая теоретическая модель Λ-системы с тремя константами релаксации (γ_{opt}, γ_{sp}, Γ) и не учитывались многие известные факторы: движение атомов (то есть доплеровский и времяпролетный эффекты), реальная сверхтонкая и зеемановская структура энергетических уровней, передача атомных скоростей благодаря столкновениям с буферным газом или со стенками атомной ячейки), эффекты пространственного профиля интенсивности лазерного пучка и так далее. В этом контексте, кажется неожиданным тот факт, что даже простейшая модель демонстрирует хорошее качественное согласие с результатами, полученными в различных экспериментальных установках.

Глава 4

Полевой сдвиг резонанса когерентного пленения населенностей (КПН) с учетом пространственной неоднородности светового пучка

4.1 Теоретическая модель

В качестве теоретической модели атомной среды рассмотрим открытую Λ-систему (см. рисунок 4.1) с учетом “ловушечного” состояния (состояние $|4\rangle$), взаимодействующую с бихроматическим полем:

$$E(t) = E_1 e^{-i(\omega_1 t + \varphi_1)} + E_2 e^{-i(\omega_2 t + \varphi_2)} + \text{к.с.} \tag{4.1}$$

Такая модель соответствует, например, возбуждению D_1-линии атомов щелочных металлов светом с круговой поляризацией. В этом случае возникает ловушечное состояние, в которое атомы накапливаются за счет оптической накачки и уже не взаимодействуют с полем. Временную динамику атомной системы будем описывать при помощи формализма атомной матрицы плотности в базисе состояний $\{|j\rangle\}$ (см. рисунок 4.1):

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m,n} |m\rangle \rho_{mn}(t) \langle n|. \tag{4.2}$$

В резонансном приближении уравнения на матрицу плотности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\partial_t \rho_{11} = -\Gamma(\rho_{11} - p_1) + \gamma_1 \rho_{33} + i(\Omega_1^* \rho_{31} - \Omega_1 \rho_{13}),\\
&\partial_t \rho_{21} = \left[-\Gamma + i(\delta_{\mathrm{R}} - \Delta_{\mathrm{LS}})\right]\rho_{21} + i(\Omega_2^* \rho_{31} - \Omega_1 \rho_{23}),\\
&\partial_t \rho_{22} = -\Gamma(\rho_{22} - p_2) + \gamma_2 \rho_{33} + i(\Omega_2^* \rho_{32} - \Omega_2 \rho_{23}),\\
&\partial_t \rho_{31} = (-\gamma_{\mathrm{opt}} + i\delta_1)\rho_{31} + i\Omega_1(\rho_{11} - \rho_{33}) + i\Omega_2 \rho_{21},\\
&\partial_t \rho_{32} = (-\gamma_{\mathrm{opt}} + i\delta_2)\rho_{32} + i\Omega_2(\rho_{22} - \rho_{33}) + i\Omega_1 \rho_{12},\\
&\partial_t \rho_{33} = -(\Gamma + \gamma_{\mathrm{sp}})\rho_{33} + i(\Omega_1 \rho_{13} - \Omega_1^* \rho_{31}) + i(\Omega_2 \rho_{23} - \Omega_2^* \rho_{32}),\\
&\partial_t \rho_{44} = -\Gamma(\rho_{44} - p_4) + \gamma_{\mathrm{trap}} \rho_{33},\\
&\rho_{12} = \rho_{21}^*, \quad \rho_{13} = \rho_{31}^*, \quad \rho_{23} = \rho_{32}^*,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

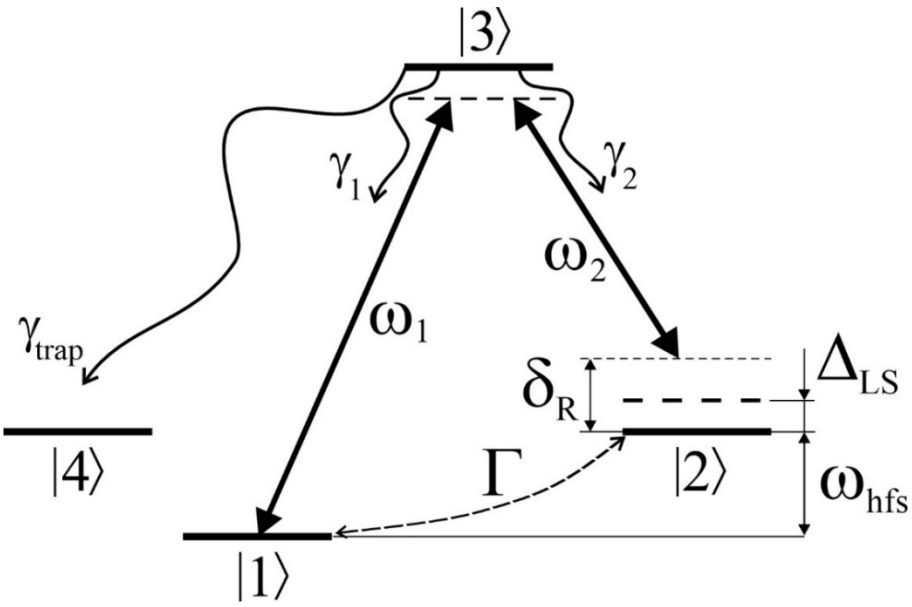

Рисунок 4.1 – Схема открытой Λ-системы. Здесь ω_1 и ω_2 есть частоты резонансных оптических полей; Δ_{LS} – полевой (штарковский) сдвиг частоты часового перехода; γ_1, γ_2 и γ_{trap} есть скорости спонтанного распада населенности из состояния $|3\rangle$ на состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$ и $|4\rangle$, соответственно. Γ – скорость распада когерентности между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, $|4\rangle$ есть “ловушечное” состояние.

где $\Omega_1 = d_{31}E_1e^{-i\varphi_1}/\hbar$ и $\Omega_2 = d_{32}E_2e^{-i\varphi_2}/\hbar$ есть частоты Раби для переходов $|1\rangle \to |3\rangle$ и $|2\rangle \to |3\rangle$, соответственно (d_{31} и d_{32} – матричные элементы оператора электрического дипольного момента); $\delta_1 = \omega_1 - \omega_{31}$ и $\delta_2 = \omega_2 - \omega_{32}$ – однофотонные отстройки волн лазерных полей; $\delta_R = \delta_1 - \delta_2 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{hfs}$ – двух-фотонная (рамановская) отстройка; Δ_{LS} – полевой (штарковский) сдвиг частоты часового перехода во время действия рамсеевских импульсов; γ_{opt} – скорость затухания оптических когерентностей (из-за процессов спонтанного распада, столкновений с буферным газом и т.д.); γ_1, γ_2 и γ_{trap} (степень открытости Λ-системы) есть скорости спонтанного распада населенности из состояния $|3\rangle$ на состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$ и $|4\rangle$, соответственно; $\gamma_{sp} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{trap}$ – скорость спонтанного распада возбужденного состояния $|3\rangle$; константа Γ моделирует скорость релаксации атомов (например, за счет пролетных эффектов) в отсутствие светового поля к

изотропному распределению по подуровням основного состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$ и $|4\rangle$ с равновесными населенностями p_1, p_2 и p_4. Дополним уравнения (3) условием нормировки:

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\} = \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1, \quad p_1 + p_2 + p_4 = 1. \tag{4.4}$$

Сформируем из компонент матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$ следующий вектор-столбец, $\boldsymbol{\rho}(t)$:

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{13}, \rho_{31}, \rho_{23}, \rho_{32}, \rho_{33}, \rho_{44})^{\mathrm{T}}, \tag{4.5}$$

Тогда систему уравнений (4.3) можно переписать как

$$\partial_t \boldsymbol{\rho}(t) = \hat{L}\boldsymbol{\rho}(t), \tag{4.6}$$

где матрица $\hat{L}$ – лиувиллиан, определяемый коэффициентами системы уравнений (4.3).

В качестве спектроскопического сигнала исследуется поглощение светового поля, которое в приближении оптически тонкой среды, пропорционально следующей величине

$$A(t) = 2\,\mathrm{Im}\{\Omega_1^* \rho_{31} + \Omega_2^* \rho_{32}\} = \partial_t \rho_{33} + (\gamma_{\mathrm{sp}} + \Gamma)\rho_{33}. \tag{4.7}$$

Выделим в частотах Раби и полевом сдвиге пространственную зависимость поперечного профиля f от радиуса r:

$$|\Omega_1(r)| = |\Omega_{10}|\sqrt{f(r)}, \quad |\Omega_2(r)| = |\Omega_{20}|\sqrt{f(r)}, \quad \Delta_{\mathrm{LS}}(r) = \Delta_0 f(r), \tag{4.8}$$

где $|\Omega_{10}|$, $|\Omega_{20}|$ и Δ_0 – частоты Раби и полевой сдвиг на оси (то есть при $r = 0$) светового пучка, соответственно. В случае гауссова профиля светового пучка функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = e^{-r^2/r_0^2} \tag{4.9}$$

где радиус r_0 определяет характерный поперечный размер пучка по уровню $1/e$ по интенсивности. Тогда, интегральное значение спектроскопического сигнала (то есть полученное в разных точках пространства) можно записать как

$$\langle A(t) \rangle = 2\pi \int_0^R A(t,r) r dr, \tag{4.10}$$

где R – радиус части светового пучка, участвующей в формировании сигнала поглощения.

4.2 Форма линии и сдвиг вершины стационарного КПН-резонанса

В случае стационарного решения уравнений (4.3), (4.4) ($\partial_t \vec{\rho} = 0$) сигнал поглощения пропорционален населенности возбужденного состояния $\rho_{33}(r)$, которую в условиях однофотонного резонанса ($\left|\delta_{1\text{-ph}}\right| \ll \gamma_{\text{opt}}$) можно представить в виде симметричного лоренцовского контура:

$$A_{\text{st}} = \rho_{33} = B + \frac{C\gamma_{\text{CPT}}^2}{[\delta_R - \Delta_{\text{LS}}]^2 + \gamma_{\text{CPT}}^2}, \tag{4.11}$$

В приближении слабого насыщения ($\left|\Omega_{1,2}\right|^2 \ll \gamma_{\text{sp}}\gamma_{\text{opt}}$) параметры C, B и γ_{CPT} в формуле (4.11) принимают вид

$$C = -\frac{4\Gamma\left|\Omega_1\right|^2\left|\Omega_2\right|^2[\Gamma\gamma_{\text{sp}}\gamma_{\text{opt}}(p_1+p_2)+(p_2\gamma_1'+p_1(2\gamma_{\text{sp}}-\gamma_2'))\left|\Omega_1\right|^2+(p_1\gamma_2'+p_2(2\gamma_{\text{sp}}-\gamma_1'))\left|\Omega_2\right|^2]}{[\gamma_{\text{sp}}\Gamma^2\gamma_{\text{opt}}^2+\Gamma\gamma_{\text{opt}}(\gamma_1'\left|\Omega_1\right|^2+\gamma_2'\left|\Omega_2\right|^2)+4\gamma_{\text{trap}}\left|\Omega_1\right|^2\left|\Omega_2\right|^2]\,(\gamma_{\text{sp}}\Gamma\gamma_{\text{opt}}+\gamma_1'\left|\Omega_1\right|^2+\gamma_2'\left|\Omega_2\right|^2)}, \tag{4.12}$$

$$B = \frac{2\Gamma[\Gamma\gamma_{\text{opt}}(p_1\left|\Omega_1\right|^2+p_2\left|\Omega_2\right|^2)+2(p_1+p_2)\left|\Omega_1\right|^2\left|\Omega_2\right|^2]}{\Gamma\gamma_{\text{opt}}(\gamma_{\text{sp}}\Gamma\gamma_{\text{opt}}+\gamma_1'\left|\Omega_1\right|^2+\gamma_2'\left|\Omega_2\right|^2)+4\gamma_{\text{trap}}\left|\Omega_1\right|^2\left|\Omega_2\right|^2}, \tag{4.13}$$

$$\gamma_{\text{CPT}}^2 = \frac{\Gamma(\Gamma\gamma_{\text{opt}}+\left|\Omega_1\right|^2+\left|\Omega_2\right|^2)^2(\gamma_{\text{sp}}\Gamma\gamma_{\text{opt}}+\gamma_1'\left|\Omega_1\right|^2+\gamma_2'\left|\Omega_2\right|^2)}{\gamma_{\text{opt}}[\gamma_{\text{sp}}\Gamma^2\gamma_{\text{opt}}^2+\Gamma\gamma_{\text{opt}}(\gamma_1'\left|\Omega_1\right|^2+\gamma_2'\left|\Omega_2\right|^2)+4\gamma_{\text{trap}}\left|\Omega_1\right|^2\left|\Omega_2\right|^2]}, \tag{4.14}$$

где используются следующие обозначения

$$\gamma_1' = 2(\gamma_{\text{sp}} - \gamma_1), \quad \gamma_2' = 2(\gamma_{\text{sp}} - \gamma_2). \tag{4.15}$$

Рассмотрим случай, когда подуровни основного состояния $\left|1\right\rangle$ и $\left|2\right\rangle$ изотропно населены в отсутствие поля и имеют одинаковые скорости спонтанного распада из возбужденного состояния $\left|3\right\rangle$, то есть

$$p_1 = p_2 = p, \quad \gamma_1' = \gamma_2' = q\gamma_{\text{sp}}, \quad \gamma_{\text{trap}} = \gamma_{\text{sp}} - \gamma_1 - \gamma_2 = (q-1)\gamma_{\text{sp}}. \tag{4.16}$$

Тогда формулы (4.12)–(4.14) в случае пространственного профиля светового пучка принимают следующий вид:

$$C(r) = -\frac{8p\Gamma\beta W_0^2 f^2(r)(1+W_0 f(r))}{\gamma_{\text{sp}}(1+qW_0 f(r))[1+qW_0 f(r)+4(q-1)\beta W_0^2 f^2(r)]}, \tag{4.17}$$

$$B(r) = \frac{2p\Gamma W_0 f(r)(1+4\beta W_0 f(r))}{\gamma_{\text{sp}}[1+qW_0 f(r)+4(q-1)\beta W_0^2 f^2(r)]}, \tag{4.18}$$

$$\gamma_{\text{CPT}}^2(r) = \frac{\Gamma^2(1+W_0 f(r))^2(1+qW_0 f(r))}{1+qW_0 f(r)+4(q-1)\beta W_0^2 f^2(r)}, \tag{4.19}$$

где используются следующие обозначения:

$$W_0 = \frac{|\Omega_{10}|^2 + |\Omega_{20}|^2}{\Gamma\gamma_{\text{opt}}}, \quad \beta = \frac{|\Omega_{10}|^2 / |\Omega_{20}|^2}{(1+|\Omega_{10}|^2 / |\Omega_{20}|^2)^2}. \tag{4.20}$$

Помимо волн с одинаковой круговой поляризацией, в спектроскопии КПН-резонансов используются также схемы, для которых не существует ловушечного состояния. В данном случае Λ-система становится замкнутой, и можно получить простое аналитическое выражение для формы линии КПН-резонанса. Для этого в формулы (4.17)–(4.19) необходимо подставить коэффициенты $p = 1/2$ и $q = 1$:

$$C(r) = -\frac{4\Gamma\beta W_0^2 f^2(r)}{\gamma_{\text{sp}}\left[1+W_0 f(r)\right]}, \tag{4.21}$$

$$B(r) = \frac{\Gamma W_0 f(r)\left[1+4\beta W_0 f(r)\right]}{\gamma_{\text{sp}}\left[1+W_0 f(r)\right]}, \tag{4.22}$$

$$\gamma_{\text{CPT}}(r) = \Gamma\left[1+W_0 f(r)\right], \tag{4.23}$$

Подставляя (4.21)–(4.23) в формулу (4.10), получаем аналитическое выражение формы линии стационарного КПН-резонанса $\langle A_{\text{st}} \rangle$ для гауссова профиля (4.9) светового пучка в случае закрытой Λ-системы:

$$\langle \rho_{33} \rangle = \frac{\pi r_0^2}{\gamma_{\text{sp}}}\Gamma\left[b - 4\beta W_0^2 F(\delta_{\text{R}})\right], \tag{4.24}$$

где

$$b = 4\beta W_0 + (1-4\beta)\ln(1+W_0), \tag{4.25}$$

а безразмерная функция $F(\delta_{\text{R}})$ описывает резонансный контур и имеет вид

$$F(\bar{\delta}_{\mathrm{R}})=\frac{W_0}{W_0^2+\bar{\Delta}_0^2}-\frac{\left(W_0^2-\bar{\Delta}_0^2\right)-2W_0\bar{\Delta}_0\bar{\delta}_{\mathrm{R}}}{2\left(W_0^2+\bar{\Delta}_0^2\right)^2}\ln\frac{\left(1+W_0\right)^2+\left(\bar{\delta}_{\mathrm{R}}-\bar{\Delta}_0\right)^2}{1+\bar{\delta}_{\mathrm{R}}^2}-$$

$$-\frac{2W_0\bar{\Delta}_0+\left(W_0^2-\bar{\Delta}_0^2\right)\bar{\delta}_{\mathrm{R}}}{\left(W_0^2+\bar{\Delta}_0^2\right)^2}\left[\arctan\frac{W_0\left(1+W_0\right)+\bar{\Delta}_0^2-\bar{\Delta}_0\bar{\delta}_{\mathrm{R}}}{W_0\bar{\delta}_{\mathrm{R}}+\bar{\Delta}_0}-\arctan\frac{W_0-\bar{\Delta}_0\bar{\delta}_{\mathrm{R}}}{W_0\bar{\delta}_{\mathrm{R}}+\bar{\Delta}_0}\right],$$

(4.26)

где для компактности записи используются следующие безразмерные величины

$$\bar{\delta}_{\mathrm{R}}=\delta_{\mathrm{R}}/\Gamma,\quad \bar{\Delta}_0=\Delta_0/\Gamma. \tag{4.27}$$

Как правило, в реальных условиях полевой сдвиг мал в сравнении с шириной резонанса. В этом случае из формулы (4.26) получаем следующее приближенное выражение для сдвига вершины резонанса:

$$\bar{\delta}_{\mathrm{top}}\approx-\frac{\left[\left(1+W_0\right)^2+\bar{\Delta}_0^2\right]^2}{\left[\left(1+W_0\right)^2-\bar{\Delta}_0^2\right]\left(W_0^2+\bar{\Delta}_0^2\right)^2}\left[\frac{\bar{\Delta}_0\left(1+2W_0\right)\left(W_0^2+\bar{\Delta}_0^2\right)}{\left(1+W_0\right)^2+\bar{\Delta}_0^2}+\right.$$

$$\left.+\left(W_0^2-\bar{\Delta}_0^2\right)\arctan\frac{\bar{\Delta}_0}{1+W_0}+\bar{\Delta}_0W_0\ln\frac{1}{\left(1+W_0\right)^2+\bar{\Delta}_0^2}\right]. \tag{4.28}$$

Как можно видеть из рисунка 4.2, пространственная неоднородность полевого сдвига является источником асимметрии интегральной формы линии КПН-резонанса.

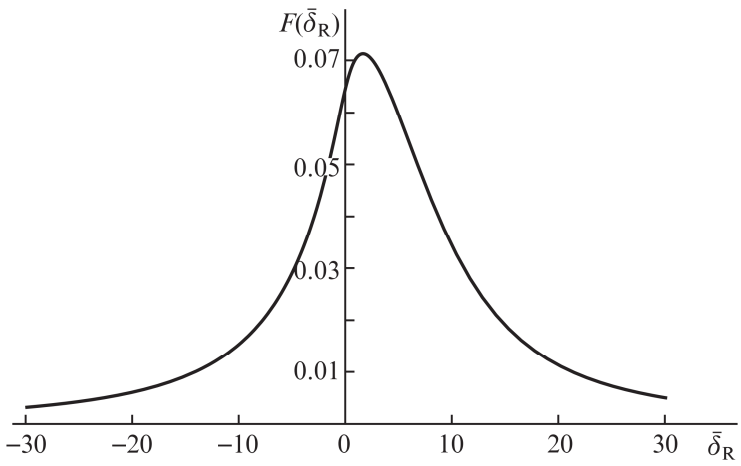

Рисунок 4.2 – Форма линии резонанса КПН $F(\bar{\delta}_{\mathrm{R}})$ в случае гауссова профиля светового пучка с учетом пространственно-неоднородного полевого сдвига. Численные параметры модели: $W_0=10,\ \bar{\Delta}_0=0.5W_0$.

На рисунке 4.3 представлена зависимость сдвига вершины резонанса от мощности поля. Видно, что гауссов профиль полевого сдвига приводит к существенно нелинейному характеру данной зависимости.

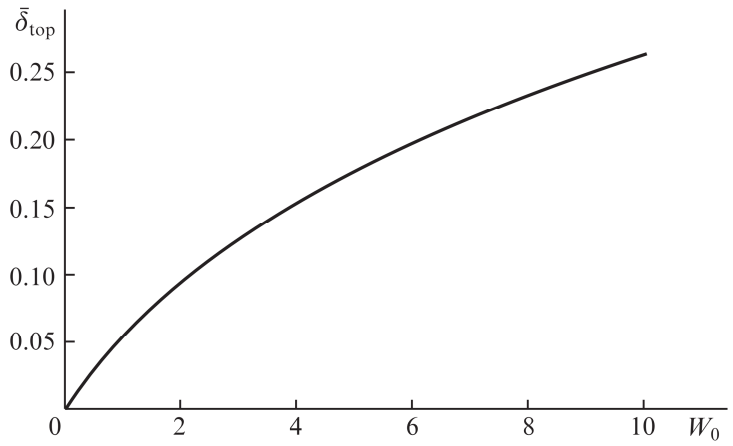

Рисунок 4.3 – Зависимость сдвига вершины резонанса КПН от интенсивности поля на оси светового пучка при $\bar{\Delta}_0 = 0.1W_0$.

4.3 Сдвиг нуля сигнала ошибки

Как уже говорилось в третьей главе, стабилизация частоты в атомных часах осуществляется на нуль сигнала ошибки. В случае гармонической частотной модуляции бихроматического поля приводит к следующей зависимости двух-фотонной отстройки от времени по закону:

$$\delta_{\text{R}}(t) = \delta_{\text{R}}^{(0)} + F\cos(f_m t), \tag{4.29}$$

где $\delta_{\text{R}}^{(0)}$ – некоторая постоянная составляющая двух-фотонной отстройки, f_m – частота модуляции, F – амплитуда частотной модуляции. Для стабилизации частоты обычно используется техника синхронного детектирования. Применительно к данному случаю это приводит к следующему выражению для сигнала ошибки как функции отстройки $\delta_{\text{R}}^{(0)}$:

$$S_{\text{err}}^{(\text{harm})}(\delta_{\text{R}}^{(0)}) = \frac{1}{T}\int_0^T \langle A(t)\rangle \cos\left(f_m t + \phi\right) dt, \tag{4.30}$$

где $T = 2\pi / f_m$ – период модуляции, $\cos\left(f_m t + \phi\right)$ – опорный сигнал, ϕ – фаза опорного сигнала относительно сигнала модуляции.

Альтернативный метод генерации сигнала ошибки основан на технике фазовых прыжков [66], когда относительная фаза $\varphi_r = \varphi_1 - \varphi_2$ изменяется ступенчатым образом, как показано на рисунке 4.4. Для построения периодического решения уравнений (4.3) используется численный метод построения динамического стационарного состояния [109], подробно описанный в первой главе настоящей диссертации. Согласно данному подходу, периодическое решение для вектора $\boldsymbol{\rho}(t)$ соответствует собственному вектору оператора эволюции $W(t+T,t)$ с собственным значением, равным единице:

$$W(t+T,t)\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{\rho}(t), \qquad \sum_{j=1}^{4} \rho_{jj}(t) = 1, \tag{4.31}$$

Решение для вектора $\boldsymbol{\rho}(t)$ в момент времени $t = t_0$ в случае периодической последовательности, показанной на рисунке 4.4, может быть найдено из следующего уравнения:

$$\begin{aligned} &\left(e^{(T/2)\hat{L}(\varphi_0)} e^{(T/2)\hat{L}(\varphi_0+\Delta\varphi)} - \hat{I}\right)\boldsymbol{\rho}(t_0) = 0, \\ &\sum_{j=1}^{4} \rho_{jj}(t) = 1, \end{aligned} \tag{4.32}$$

где $\hat{I}$ есть единичная матрица. Далее, необходимо вычислить значение вектора $\boldsymbol{\rho}(t)$ в момент времени $t = t_0 + T/2$:

$$\boldsymbol{\rho}(t_0 + T/2) = e^{(T/2)\hat{L}(\varphi_0+\Delta\varphi)}\boldsymbol{\rho}(t_0). \tag{4.33}$$

Для удобства выберем начало периода в момент времени $t_0 = 0$. Тогда в произвольный момент времени внутри периода $0 \le t \le T$, получаем следующее выражение для $\boldsymbol{\rho}(t)$:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \begin{cases} e^{t\hat{L}(\varphi_0+\Delta\varphi)}\boldsymbol{\rho}(t), & 0 \le t < T/2, \\ e^{(t-T/2)\hat{L}(\varphi_0)}\boldsymbol{\rho}(T/2), & T/2 \le t < T. \end{cases}, \tag{4.34}$$

В этом случае сигнал ошибки $S_{\text{err}}^{(\text{PJ})}(\delta_R)$ формируется на основе интегрирования динамического отклика в сигнале поглощения после фазового прыжка (здесь $\delta_{\text{R}} \equiv \delta_{\text{R}}^{(0)}$):

$$S_{\text{err}}^{(\text{PJ})}(\delta_R) = \frac{1}{T}\left[\int_{t_0}^{t_0+\tau_d} \langle A(t,\varphi_0+\Delta\varphi)\rangle dt - \int_{t_0+T/2}^{t_0+T/2+\tau_d} \langle A(t,\varphi_0)\rangle dt\right]. \quad (4.35)$$

где φ_0 – начальная фаза, τ_d – время интегрирования, $\Delta\varphi$ – величина фазового прыжка (см. рисунок 4.4). Сигнал ошибки, сформированный одним из описанных выше методов, имеет дисперсионную форму и схематически показан на рисунке 4.5, где сдвиг точки нуля δ_{ES} обусловлен наличием полевого сдвига Δ_{LS}.

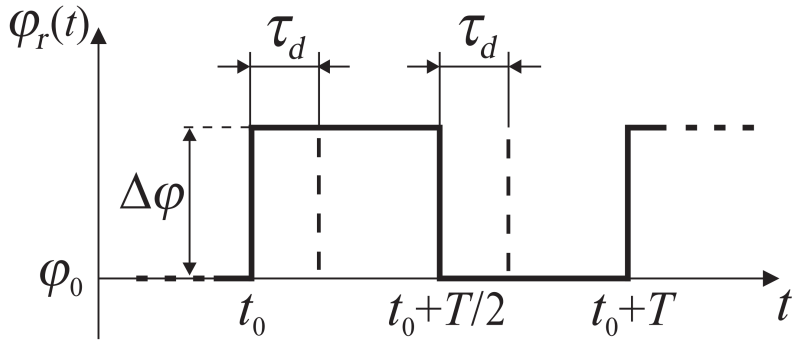

Рисунок 4.4 – Схема периодической прямоугольной модуляции относительной фазы $\varphi_r = \varphi_1 - \varphi_2$ бихроматического поля (4.1); φ_0 – начальная рамановская фаза, τ_d – время детектирования, $\Delta\varphi$ – фазовый прыжок, T – период модуляции.

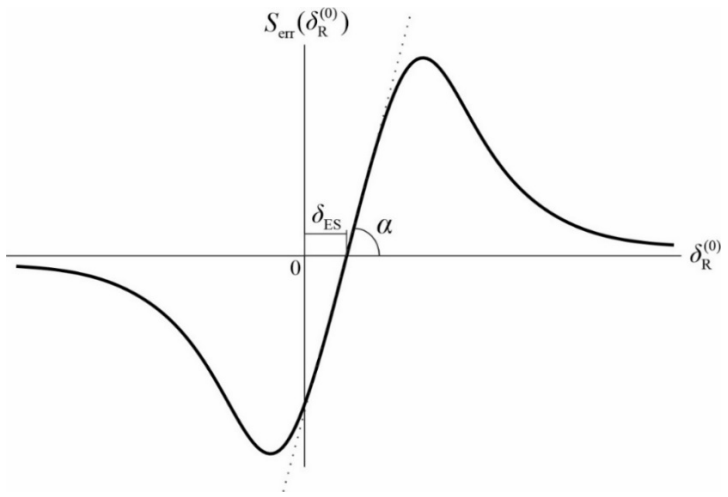

Рисунок 4.5 – Схематическое изображение зависимости сигнала ошибки $S_{\text{err}}(\delta_{\text{R}}^{(0)})$ при наличии полевого сдвига Δ_{LS}, δ_{ES} – сдвиг нуля сигнала ошибки.

В настоящем разделе, исследуется зависимость сдвига нуля δ_{ES} сигналов ошибки (4.30) и (4.35) от параметра накачки W_0 (пропорционален интенсивности лазерного поля на оси пучка). Численные расчёты проводились для сигналов ошибки, которые в точке сдвига δ_{ES} (см. рисунок 4.5) их нулевого значения имеют оптимальный наклон. Выражение для наклона K имеет следующий вид:

$$K = \mathrm{tg}(\alpha) = \left.\frac{\partial S_{\mathrm{err}}}{\partial \delta_{\mathrm{R}}^{(0)}}\right|_{\delta_{\mathrm{R}}^{(0)}=\delta_{\mathrm{ES}}}, \tag{4.36}$$

Как было показано в главе 3, для гармонической модуляции двух-фотонной отстройки для заданных индекса и частоты модуляции можно получить максимальное значение наклона $|K|_{\mathrm{opt}}$ путем выбора оптимальной фазы ϕ_{opt}. Для высоких частот модуляции ($f_m \gg 2\Gamma$) (аналог режима стабилизации частоты Паунда-Древера-Холла для КПН-резонансов (см. главу 3)) наибольшее значение $|K|_{\mathrm{opt}}$ определяется только квадратурным сигналом ошибки и достигается при $M \approx 1.1$.

Для фазового меандра $|K|_{\mathrm{opt}}$ можно достичь при $\tau_d = T/2$ и $\Delta\varphi = \pi/2$ [63].

Исследуемые зависимости были рассчитаны для обоих вариантов модуляции в двух различных режимах: медленной и быстрой модуляции. Медленная модуляция определяется следующими условиями:

$$\frac{F f_m}{\gamma_{\mathrm{HWHM}}^2} \ll 1 \text{ (частотная модуляция)}, \; T/2 \gg \gamma_{\mathrm{HWHM}}^{-1} \text{ (фазовый меандр)}, \tag{4.37}$$

где γ_{HWHM} – полуширина на полувысоте КПН-резонанса, форма линии которого для гауссова профиля светового пучка определяется стационарным решением для населенности возбужденного состояния, усредненного по сечению пучка $\langle \rho_{33} \rangle_{\delta_{\mathrm{R}}}$.

Быстрая модуляция соответствует неравенствам:

$$\frac{F f_m}{\gamma_{\mathrm{HWHM}}^2} \gtrsim 1 \text{ (частотная модуляция)}, \; T/2 \lesssim \gamma_{\mathrm{HWHM}}^{-1} \text{ (фазовый меандр)}, \tag{4.38}$$

Зависимость γ_{HWHM} от интенсивности поля на оси пучка для разных степеней открытости Λ-системы показана на рисунке 4.6.

На рисунке 4.7(*а*) представлены графики зависимости сдвига нуля сигнала ошибки от параметра W_0 для режима медленной модуляции при различной степени открытости Λ-системы. Как видно, данные зависимости являются сильно нелинейными. Причем нелинейность возрастает с увеличением скорости распада возбужденного уровня $|3\rangle$ в ловушечное состояние $|4\rangle$. В свою очередь, для быстрой модуляции (см. рисунок 4.7(*б*)) степень нелинейности аналогичных зависимостей уменьшается по сравнению с режимом медленной модуляции. Этот эффект особенно выражен для закрытой Λ-системы. Кроме того, как видно из рисунка 4.7(*б*), в режиме быстрой модуляции данные зависимости практически совпадают для обоих методов формирования сигнала ошибки.

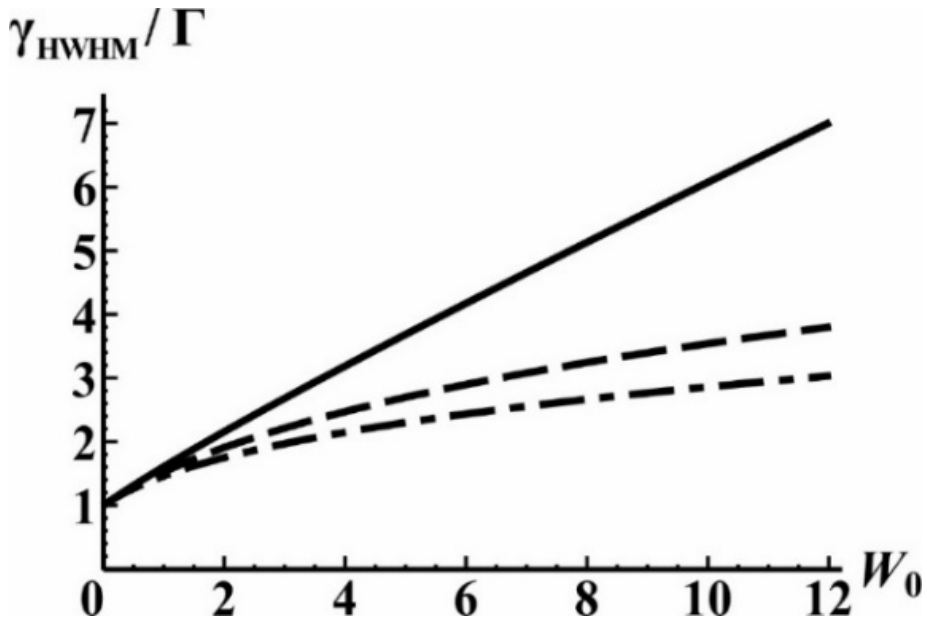

Рисунок 4.6 – Зависимость полуширины γ_{HWHM} на полувысоте стационарного КПН-резонанса от параметра W_0 при различных степенях открытости Λ-системы: $p = 1/2$, $\gamma = \gamma_{\mathrm{sp}}/2$, $\gamma_{\mathrm{trap}} = 0$ (сплошная линия); $p = 1/3$, $\gamma = \gamma_{\mathrm{sp}}/3$, $\gamma_{\mathrm{trap}} = \gamma_{\mathrm{sp}}/3$ (пунктирная линия); $p = 1/8$, $\gamma = \gamma_{\mathrm{sp}}/8$, $\gamma_{\mathrm{trap}} = 3\gamma_{\mathrm{sp}}/4$ (штрих-пунктирная линия). Другие параметры модели: $\Omega_{10} = \Omega_{20}$, $\Gamma = 5\times10^{-5}\gamma_{\mathrm{sp}}$, $\gamma_{\mathrm{opt}} = 50\gamma_{\mathrm{sp}}$, $\bar{\Delta}_0 = 0.1W_0$.

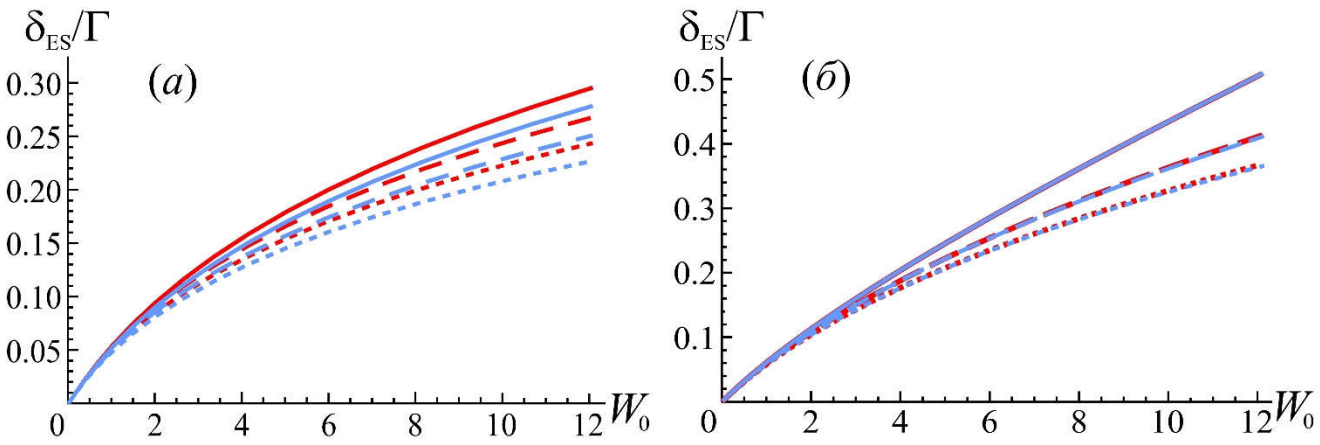

Рисунок 4.7 – Зависимости сдвига нуля δ_{ES} сигнала ошибки от параметра W_0: (*а*) режим медленных гармонической частотной модуляции (красные линии) при $f_m = 0.5\Gamma$ и фазовой ступенчатой модуляции при $T = 12\Gamma^{-1}$ (синие линии) (*б*) режим быстрых гармонической частотной модуляции (красные линии) при $f_m = 40\Gamma$ и фазовой ступенчатой модуляции при $T = 0.15\Gamma^{-1}$ (синие линии). Графики построены при различных степенях открытости Λ-системы: $p = 1/2$, $\gamma = \gamma_{\mathrm{sp}}/2$, $\gamma_{\mathrm{trap}} = 0$ (сплошные линии); $p = 1/3$, $\gamma = \gamma_{\mathrm{trap}} = \gamma_{\mathrm{sp}}/3$ (штриховые линии); $p = 1/8$, $\gamma = \gamma_{\mathrm{sp}}/8$, $\gamma_{\mathrm{trap}} = 3\gamma_{\mathrm{sp}}/4$ (пунктирные линии). Другие параметры модели: $\Omega_{10} = \Omega_{20}$, $\Gamma = 5\times10^{-5}\gamma_{\mathrm{sp}}$, $\gamma_{\mathrm{opt}} = 50\gamma_{\mathrm{sp}}$, $F/f_m = 1.1$, $\tau_d = T/2$, $\Delta\varphi = \pi/2$, $\bar{\Delta}_0 = 0.1W_0$.

Также была проанализирована зависимость сдвига нуля сигнала ошибки δ_{ES} от мощности при различных значениях радиуса диафрагмы R, вырезающей центральную часть светового пучка (см. рисунок 4.8). Видно, что с уменьшением данного радиуса зависимость стремится к линейному закону. Следует отметить также, что полученные зависимости визуально практически неразличимы для двух типов модуляции (частотной гармонической и фазовой ступенчатой).

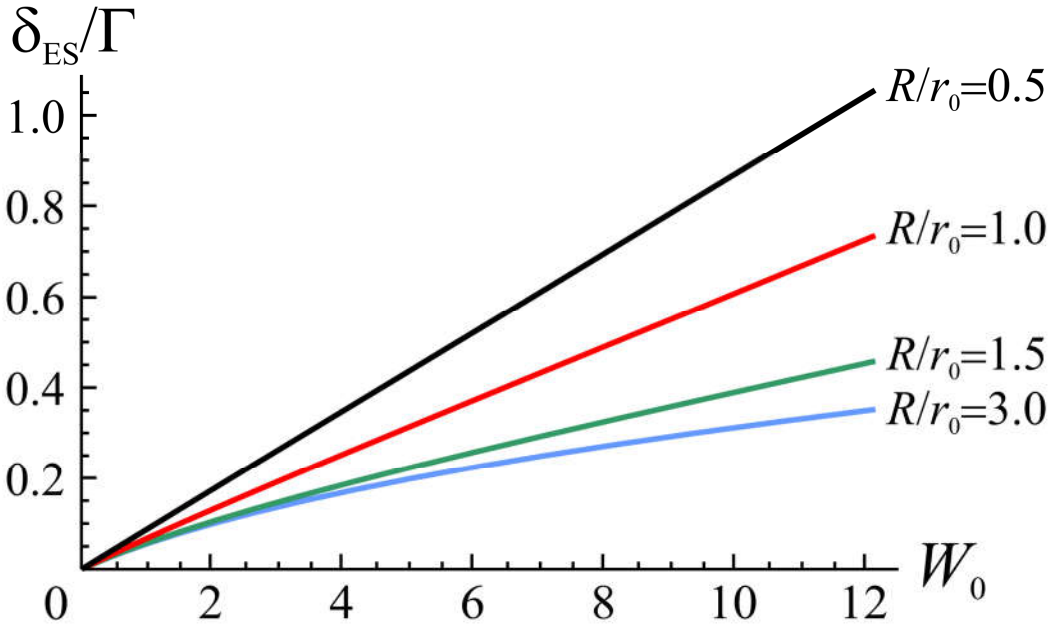

Рисунок 4.8 – Зависимость сдвига нуля δ_{ES} сигнала ошибки от параметра W_0 в случае быстрых гармонической частотной модуляции при $f_m = 40\Gamma$ и фазового меандра при $T = 0.15\Gamma^{-1}$. Графики построены при различных значениях радиуса интегрирования: $R = 3r_0$ (синяя линия), $R = 1.5r_0$ (зеленая линия), $R = r_0$ (красная линия), $R = 0.5r_0$ (черная линия). Другие параметры модели: $\Omega_{10} = \Omega_{20}$, $p = 1/8$, $\gamma = \gamma_{\mathrm{sp}}/8$, $\gamma_{\mathrm{trap}} = 3\gamma_{\mathrm{sp}}/4$, $\Gamma = 5\times10^{-5}\gamma_{\mathrm{sp}}$, $\gamma_{\mathrm{opt}} = 50\gamma_{\mathrm{sp}}$, $F/f_m = 1.1$, $\tau_d = T/2$, $\Delta\varphi = \pi/2$, $\overline{\Delta}_0 = 0.1W_0$.

Глава 5
Обобщенные рамсеевские методы в спектроскопии резонансов когерентного пленения населенностей (КПН)

5.1 Теоретическая модель

В качестве теоретической модели атомной среды рассмотрим трехуровневую Λ-систему, взаимодействующую с рамсеевскими импульсами бихроматического поля (см. рисунок 5.1):

$$E(t) = E_1(t)e^{-i(\omega_1 t+\varphi_1)} + E_2(t)e^{-i(\omega_2 t+\varphi_2)} + \text{к.с.} \tag{5.1}$$

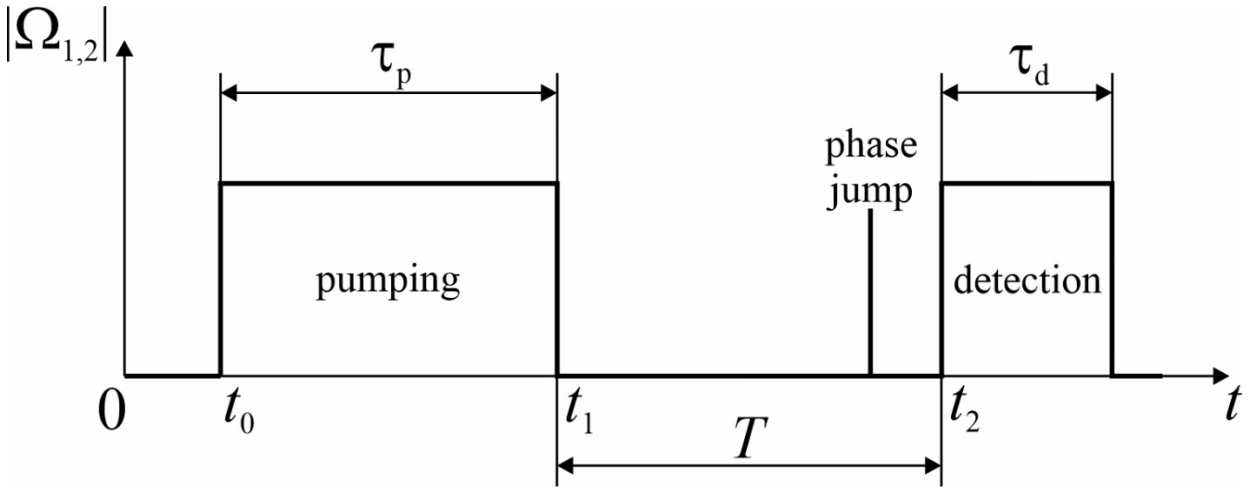

Рисунок 5.1 – Рамсеевская схема для спектроскопии КПН-резонансов. Первый импульс накачивает атомы в темное состояние. Второй импульс детектирует спектроскопическую информацию.

КПН-резонанс возбуждается при условии, что частотная разность $\omega_1 - \omega_2$ варьируется вблизи частоты сверхтонкого расщепления ω_{hfs} перехода между подуровнями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ (часовые состояния) основного состояния. Временную динамику Λ-системы будем описывать при помощи формализма атомной матрицы плотности в базисе состояний $\{|j\rangle\}$ (см. рисунок 5.2):

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m,n} |m\rangle \rho_{mn}(t) \langle n|. \tag{5.2}$$

В резонансном приближении уравнения на матрицу плотности имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \rho_{11} = \frac{\Gamma}{2}\mathrm{Tr}[\hat{\rho}] - \Gamma\rho_{11} + \gamma_1\rho_{33} + i\left(\Omega_1^*\rho_{31} - \Omega_1\rho_{13}\right),\\
&\partial_t \rho_{21} = \left[-\Gamma + i(\delta_{\mathrm{R}} - \Delta_{\mathrm{sh}})\right]\rho_{21} + i\left(\Omega_2^*\rho_{31} - \Omega_1\rho_{23}\right),\\
&\partial_t \rho_{22} = \frac{\Gamma}{2}\mathrm{Tr}[\hat{\rho}] - \Gamma\rho_{22} + \gamma_2\rho_{33} + i\left(\Omega_2^*\rho_{32} - \Omega_2\rho_{23}\right),\\
&\partial_t \rho_{31} = (-\gamma_{\mathrm{opt}} + i\delta_1)\rho_{31} + i\Omega_1(\rho_{11} - \rho_{33}) + i\Omega_2\rho_{21},\\
&\partial_t \rho_{32} = (-\gamma_{\mathrm{opt}} + i\delta_2)\rho_{32} + i\Omega_2(\rho_{22} - \rho_{33}) + i\Omega_1\rho_{12},\\
&\partial_t \rho_{33} = -(\Gamma + \gamma_{\mathrm{sp}})\rho_{33} + i\left(\Omega_1\rho_{13} - \Omega_1^*\rho_{31}\right) + i\left(\Omega_2\rho_{23} - \Omega_2^*\rho_{32}\right),\\
&\rho_{12} = \rho_{21}^*, \quad \rho_{13} = \rho_{31}^*, \quad \rho_{23} = \rho_{32}^*.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

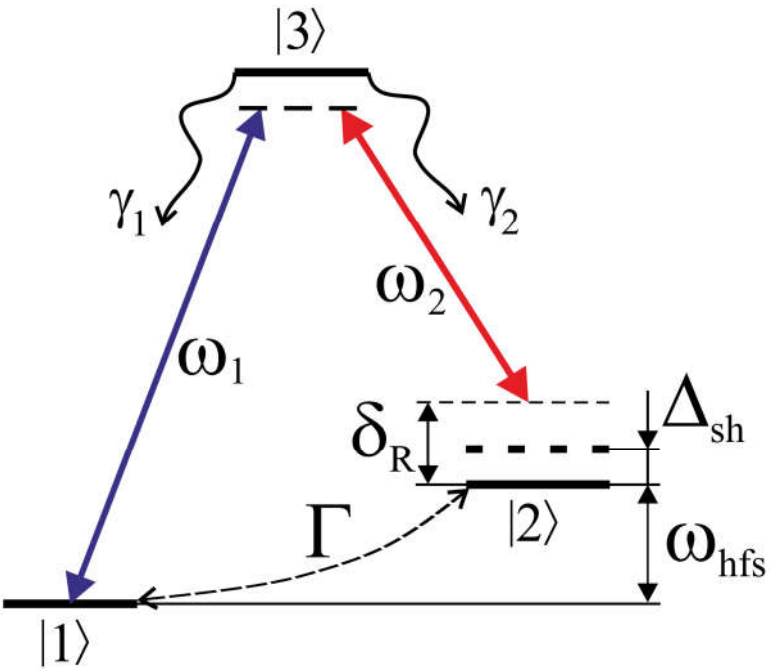

Рисунок 5.2 – Схема трехуровневой Λ-системы. Здесь ω_1 и ω_2 есть частоты резонансных оптических полей; Δ_{sh} – полевой (штарковский) сдвиг частоты часового перехода; γ_1 и γ_2 есть скорости спонтанного распада населенности из состояния $|3\rangle$ на состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$, соответственно. Γ – скорость распада когерентности между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$.

Здесь $\Omega_1 = d_{31}E_1e^{-i\varphi_1}/\hbar$ и $\Omega_2 = d_{32}E_2e^{-i\varphi_2}/\hbar$ есть частоты Раби для переходов $|1\rangle \to |3\rangle$ и $|2\rangle \to |3\rangle$, соответственно (d_{31} и d_{32} – матричные элементы оператора

электрического дипольного момента); $\delta_1 = \omega_1 - \omega_{31}$ и $\delta_2 = \omega_2 - \omega_{32}$ есть однофотонные отстройки лазерных полей; $\delta_{\mathrm{R}} = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{\mathrm{hfs}}$ – двух-фотонная (рамановская) отстройка; Δ_{sh} есть световой (штарковский) сдвиг частоты часового перехода во время действия рамсеевских импульсов; γ_{opt} – скорость затухания оптических когерентностей (из-за процессов спонтанного распада, столкновений с буферным газом и т.д.); γ_1 и γ_2 есть скорости спонтанного распада населенности из состояния $|3\rangle$ на состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$, соответственно; γ_{sp} – скорость спонтанного распада возбужденного состояния $|3\rangle$ (в случае закрытой Λ-системы, $\gamma_{\mathrm{sp}} = \gamma_1 + \gamma_2$); константа Γ определяет релаксацию атомов (например, за счет пролетных эффектов) к изотропному распределению по подуровням основного состояния.

Следует отметить, что что феноменологический параметр Δ_{sh} представляет собой полный нерезонансный полевой сдвиг часового перехода $|1\rangle \to |2\rangle$, возникающий за счет взаимодействия всех частотных компонент поля со всеми нерезонансными атомными уровнями. Возможные резонансные сдвиги в случае $\delta_1 \neq 0$ и/или $\delta_2 \neq 0$ автоматически учитываются в системе уравнений (5.3). Скорость релаксации Γ главным образом определяется временем пролета τ_{tr} атомов через лазерный пучок ($\Gamma \sim \tau_{\mathrm{tr}}^{-1}$). Поэтому столкновения с буферным газом значительно увеличивают τ_{tr} за счет диффузионного характера движения атомов (без нарушения сверхтонкой когерентности), что приводит к сужению темного резонанса. С другой стороны, буферный газ значительно увеличивает скорость оптической дефазировки $\gamma_{\mathrm{opt}} \gg \gamma_{\mathrm{sp}}$, в то время как без буферного газа $\gamma_{\mathrm{opt}} = \gamma_{\mathrm{sp}} / 2$.

Представим систему линейных уравнений (5.3) в векторном виде:

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} = \hat{L}\boldsymbol{\rho}, \tag{5.4}$$

где вектор-столбец $\boldsymbol{\rho}(t)$ сформирован из элементов матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{13}, \rho_{31}, \rho_{23}, \rho_{32}, \rho_{33})^{\mathrm{T}}, \tag{5.5}$$

и матрица $\hat{L}$ (лиувиллиан) (см. Приложение А, выражение (А1)) определяется коэффициентами уравнений (5.3).

В качестве спектроскопического сигнала исследуется поглощение в течение детектирующего импульса (для $t > t_2$, см. рисунок 5.1), которое в приближении оптически тонкой среды пропорционально

$$A(t) = 2\,\mathrm{Im}\left\{\Omega_1(t)\rho_{31}(t) + \Omega_2(t)\rho_{32}(t)\right\}. \tag{5.6}$$

Сигнал, накопленный в течение детектирующего времени τ_d, вычисляется интегрированием выражения (5.6) по времени:

$$\overline{A}(\delta_R) = \int_{t_2}^{t_2+\tau_d} A(t)dt. \tag{5.7}$$

При использовании стандартного определения скалярного произведения $(\vec{x},\vec{y}) = \sum_m x_m^* y_m$, выражение (5.6) может быть записано следующим образом:

$$A(t) = \left(\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_\mathrm{d}(t)\hat{G}_\mathrm{T}\hat{W}_\mathrm{p}\boldsymbol{\rho}_\mathrm{in}\right), \tag{5.8}$$

где вектор $\mathbf{\Omega}$ определяется как

$$\mathbf{\Omega} = (0,0,0,0,-i\Omega_1^*, i\Omega_1, -i\Omega_2^*, i\Omega_2, 0)^\mathrm{T}. \tag{5.9}$$

Вектор $\boldsymbol{\rho}_\mathrm{in}$ соответствует начальному атомному состоянию. Операторы $\hat{W}_\mathrm{p} = \hat{W}_\mathrm{p}(t_1,t_0)$ и $\hat{W}_\mathrm{d} = \hat{W}_\mathrm{d}(t,t_2)$ определяют эволюцию атомов, взаимодействующих с импульсом накачки $(t_0 < t < t_1)$ и детектирующим импульсом $(t > t_2)$, соответственно. Оператор $\hat{G}_\mathrm{T}$ описывает свободную эволюцию атомов $(t_1 < t < t_2 = t_1 + T)$:

$$\hat{G}_\mathrm{T} = e^{\hat{L}_0 T}, \tag{5.10}$$

где лиувиллиан $\hat{L}_0$ формируется из уравнений (5.3) – (5.5) в отсутствии светового поля (то есть $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ и $\Delta_\mathrm{sh} = 0$).

В экспериментах темное время T, как правило, значительно превышает (на 2–4 порядка) времена распада населенности возбужденного состояния и оптических когерентностей, что соответствует условию $T \gg \gamma_\mathrm{opt}^{-1}, \gamma_\mathrm{sp}^{-1}$. Поэтому, в

диагональных элементах матрицы $\hat{G}_{\mathrm{T}}$ можно принять, что $e^{-\gamma_{\mathrm{sp}}T} \approx 0$ и $e^{-\gamma_{\mathrm{opt}}T} \approx 0$. В этом случае, оператор $\hat{G}_{\mathrm{T}}$ принимает вид

$$\hat{G}_{\mathrm{T}} \approx \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{19} \\ 0 & e^{-(\Gamma+i\delta_{\mathrm{R}})T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\Gamma-i\delta_{\mathrm{R}})T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & 0 & 0 & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Рассмотрим схему стабилизации, где для формирования сигнала ошибки $S_{\mathrm{err}}(\delta_{\mathrm{R}})$ используются скачки относительной фазы бихроматического поля $(\varphi_1 - \varphi_2)$ перед вторым рамсеевским импульсом. Используя формулы (5.7) и (5.8), напишем выражение для спектроскопического сигнала с учетом скачка фазы:

$$\overline{A}(\delta_{\mathrm{R}}, \alpha_1, \alpha_2) = \int_{t_2}^{t_2+\tau_d} \left(\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_{\mathrm{d}}(t) \hat{\Phi}(\alpha_1, \alpha_2) \hat{G}_{\mathrm{T}} \hat{W}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{in}} \right) dt, \tag{5.12}$$

где оператор фазового скачка $\hat{\Phi}(\alpha_1, \alpha_2)$ для бихроматического поля имеет вид

$$\hat{\Phi}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\alpha_1-\alpha_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Сигнал ошибки $S_{\mathrm{err}}(\delta_{\mathrm{R}})$ формируется как разность сигналов (5.12) для двух различных фазовых скачков:

$$S_{\text{err}}(\delta_{\text{R}}) = \overline{A}(\delta_{\text{R}}, \alpha_1^+, \alpha_2^+) - \overline{A}(\delta_{\text{R}}, \alpha_1^-, \alpha_2^-) = \\ = \int_{t_2}^{t_2+\tau_d} \left(\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_{\text{d}}(t) \hat{D}_{\Phi} \hat{G}_{\text{T}} \hat{W}_{\text{p}} \boldsymbol{\rho}_{\text{in}} \right) dt, \tag{5.14}$$

где верхний индекс “+” обозначает изменения фазы для первого скачка, и индекс “-” соответствует второму фазовому скачку. Оператор $\hat{D}_{\Phi}$ в (5.14) имеет форму:

$$\hat{D}_{\Phi} = \hat{\Phi}(\alpha_1^+, \alpha_2^+) - \hat{\Phi}(\alpha_1^-, \alpha_2^-) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_r^+} - e^{-i\alpha_r^-} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_r^+} - e^{i\alpha_r^-} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha_1^+} - e^{-i\alpha_1^-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha_1^+} - e^{i\alpha_1^-} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha_2^+} - e^{-i\alpha_2^-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha_2^+} - e^{i\alpha_2^-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Введем обозначение для относительной фазы бихроматического поля:

$$\alpha_r^+ = (\alpha_1^+ - \alpha_2^+), \quad \alpha_r^- = (\alpha_1^- - \alpha_2^-). \tag{5.16}$$

В соответствии с (5.11) и (5.15) получаем следующее выражение для матричного произведения $\hat{D}_{\Phi}\hat{G}_{\text{T}}$:

$$\hat{D}_{\Phi}\hat{G}_{\text{T}} = e^{-\Gamma T}\hat{\Upsilon}_T, \tag{5.17}$$

где матрица $\hat{\Upsilon}_T$ имеет вид:

$$\hat{\Upsilon}_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_{\mathrm{R}}T}(e^{-i\alpha_r^+} - e^{-i\alpha_r^-}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_{\mathrm{R}}T}(e^{i\alpha_r^+} - e^{i\alpha_r^-}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Тогда, при учете (5.17), сигнал ошибки (5.14) вычисляется по формуле

$$S_{\mathrm{err}}(\delta_{\mathrm{R}}) = e^{-\Gamma T}\int_{t_2}^{t_2+\tau_{\mathrm{d}}} \left(\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_{\mathrm{d}}(t)\hat{\Upsilon}_T \hat{W}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{in}}\right)dt. \quad (5.19)$$

Таким образом, как видно из выражения (5.18) сигнал ошибки чувствителен только к изменению относительной фазы $\alpha_r = \alpha_1 - \alpha_2$, но не зависит от фаз $\alpha_{1,2}$ по отдельности. Также следует отметить, что максимальная амплитуда сигнала ошибки (5.19) достигается для фазовых скачков $\alpha_r^+ = \pi/2$ и $\alpha_r^- = -\pi/2$.

В атомных часах частота локального генератора стабилизируется в нуле сигнала ошибки для центрального рамсеевского резонанса. Поэтому одним из ключевых параметров, влияющих на метрологические характеристики, является сдвиг частоты $\overline{\delta}_{\mathrm{clock}}$, что соответствует решению уравнения:

$$S_{\mathrm{err}}(\delta_{\mathrm{R}}) = 0, \quad (5.20)$$

в отношении δ_{R}.

5.2 Обобщенная автобалансная рамсеевская спектроскопия (ОАБРС) для КПН-резонансов

Метод обобщенной автобалансной рамсеевской спектроскопии (ОАБРС) был разработан для оптических стандартов частоты в рамках двухуровневой атомной системы в работе [96]. Ниже будет представлено доказательство применимости этого метода для КПН-часов.

Схема стабилизации содержит две петли обратной связи, действующих параллельно на попеременно управляемых рамсеевских последовательностях с различными временами свободной эволюции T_1 и T_2 (см. рисунок 5.3). Первая петля управляет частотой локального осциллятора (то есть рамановской отстройкой δ_{R}), а вторая петля управляет некоторым сопутствующим параметром ξ, связанным с первым и/или вторым рамсеевским импульсом. Алгоритм ОАБРС организован как серия следующим циклов. Для рамсеевской последовательности со временем свободной эволюции T_1, сопутствующий параметр фиксируется (то есть $\xi = \xi_{\mathrm{fixed}}$), а частота стабилизируется в нуле первого сигнала ошибки $S_{\mathrm{err}}^{(T_1)}(\delta_{\mathrm{R}}, \xi_{\mathrm{fixed}}) = 0.$ Работу этой петли обратной связи можно представить в виде следующей рекуррентной последовательности:

$$\delta_{\mathrm{R}}^{(n)} = \delta_{\mathrm{R}}^{(n-1)} + rS_{err}^{(T_1)}(\delta_{\mathrm{R}}^{(n-1)}, \xi_{\mathrm{fixed}}), \tag{5.21}$$

где r и n есть коэффициент и индекс итерации для первой петли обратной связи, соответственно. Далее измерения проводятся для последовательности рамсеевских импульсов с другим временем свободной эволюции T_2, где ранее полученная частота фиксируется (то есть $\delta_{\mathrm{R}} = \delta_{\mathrm{fixed}}$), и сопутствующий параметр ξ стабилизируется в нуля второго сигнала ошибки: $S_{\mathrm{err}}^{(T_1)}(\delta_{\mathrm{fixed}}, \xi) = 0.$ Операцию второй петли обратной связи можно описать другой рекуррентной последовательностью:

$$\xi^{(m)} = \xi^{(m-1)} + qS_{err}^{(T_2)}(\delta_{\mathrm{fixed}}, \xi^{(m-1)}), \tag{5.22}$$

где q и m есть коэффициент и индекс итерации для второй петли обратной связи, соответственно.

При повторении этих итераций, оба параметра $\delta_{\mathrm{R}} = \overline{\delta}_{\mathrm{clock}}$ и $\xi = \overline{\xi}$ в конечном итоге стабилизируются, что соответствует решению системы уравнений:

$$S_{\mathrm{err}}^{(T_1)}(\delta_{\mathrm{R}}, \xi) = 0, \quad S_{\mathrm{err}}^{(T_2)}(\delta_{\mathrm{R}}, \xi) = 0, \tag{5.23}$$

в отношении двух переменных δ_{R} и ξ. Подставляя выражение для сигнала ошибки (5.19) в (5.23), получаем

$$\int_{t_2}^{t_2+\tau_{\mathrm{d}}} \left(\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_{\mathrm{d}}(t) \hat{\Upsilon}_{T_1} \hat{W}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{in}} \right) dt = 0, \quad \int_{t_2}^{t_2+\tau_{\mathrm{d}}} \left(\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_{\mathrm{d}}(t) \hat{\Upsilon}_{T_2} \hat{W}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{in}} \right) dt = 0. \tag{5.24}$$

Самая быстрая сходимость итераций (5.21) и (5.22) к решению уравнения (5.24) выполняется для следующих коэффициентов обратной связи:

$$r = -[\partial_{\delta_{\mathrm{R}}} S_{\mathrm{err}}^{(T_1)}(\delta_{\mathrm{R}}, \xi)\big|_{\delta_{\mathrm{R}}=\bar{\delta}_{\mathrm{clock}},\ \xi=\bar{\xi}}]^{-1},$$
$$q = -[\partial_{\xi} S_{\mathrm{err}}^{(T_2)}(\delta_{\mathrm{R}}, \xi)\big|_{\delta_{\mathrm{R}}=\bar{\delta}_{\mathrm{clock}},\ \xi=\bar{\xi}}]^{-1}, \tag{5.25}$$

где $\partial_{\delta_{\mathrm{R}}} = \partial / \partial\delta_{\mathrm{R}}$ и $\partial_{\xi} = \partial / \partial\xi$ есть дифференциальные операторы. На практике оптимальные значения r и q определяются экспериментально.

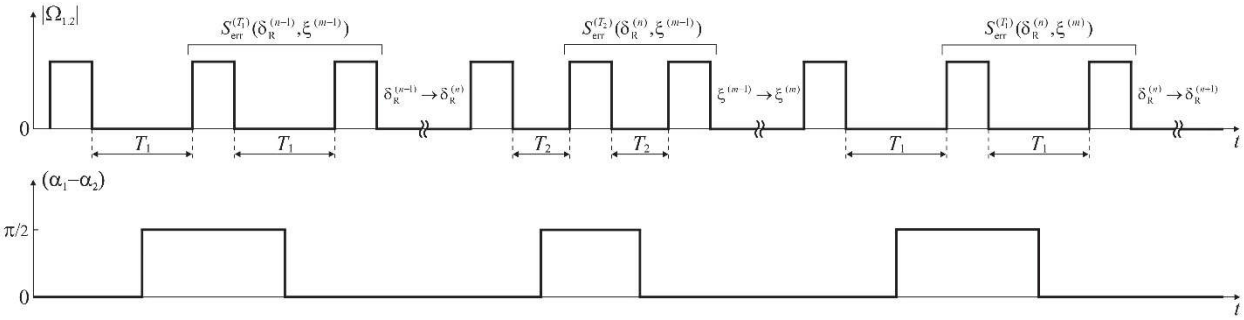

Рисунок 5.3 – Схема последовательности рамсеевских импульсов для метода ОАБРС в спектроскопии КПН-резонансов, где n и m есть индексы итераций для первой и второй петли обратной связи, соответственно.

Покажем, что система (5.24) всегда имеет решение $\delta_{\mathrm{R}} = 0$. Из (5.18) видно, что в случае $\delta_{\mathrm{R}} = 0$, имеет место следующее равенство для матриц $\hat{\Upsilon}_{T_1}$ и $\hat{\Upsilon}_{T_2}$

$$\hat{\Upsilon}_{T_1}(\delta_{\mathrm{R}} = 0) = \hat{\Upsilon}_{T_2}(\delta_{\mathrm{R}} = 0). \tag{5.26}$$

В этом случае, система из двух уравнений (5.24) сводится к одному уравнению на неизвестный параметр ξ:

$$\int_{t_2}^{t_2+\tau_{\mathrm{d}}} \left(\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_{\mathrm{d}}(t)\hat{\Upsilon}_T(\delta_{\mathrm{R}} = 0)\hat{W}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{in}} \right) dt = 0, \tag{5.27}$$

которое всегда имеет решение.

Таким образом, было аналитически показано, что выбор соответствующего значения сопутствующего параметра позволяет полностью подавить полевой сдвиг часовой частоты ($\bar{\delta}_{\mathrm{clock}} = 0$), стабилизируемой по КПН-резонансу. Данный результат не зависит от параметров рамсеевских импульсов (амплитуды, формы, фазы), констант релаксации, ошибок в формировании фазовых скачков и т.д. Такая

устойчивость этого метода к различным техническим ошибкам демонстрирует его высокую надежность.

Следует отметить, что рамсеевский сигнал состоит из большого количества фрингов (см. рисунок 5.4(а)). В результате система уравнений (5.24) имеет ряд решений:

$$\delta_{\mathrm{R}} = n\pi / (T_1 - T_2) \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...), \tag{5.28}$$

связанных не только с центральным рамсеевским резонансом, но и с другими фрингами (при $n \neq 0$). Эти решения определяются условием

$$\hat{\Upsilon}_{T_1} = \pm \hat{\Upsilon}_{T_2} \quad \Rightarrow \quad e^{i\delta_R T_1} = \pm\, e^{i\delta_R T_2}. \tag{5.29}$$

В этом случае соответствующий сопутствующий параметр $\bar{\xi}$ находится из уравнения

$$\int_{t_2}^{t_2+\tau_{\mathrm{d}}} \left(\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_{\mathrm{d}}(t) \hat{\Upsilon}_{T_2} \hat{W}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{in}} \right) dt = 0, \tag{5.30}$$

Однако стабилизация частоты в атомных часах осуществляется по центральному рамсеевскому резонансу ($\delta_{\mathrm{R}} = 0$). Поэтому нахождение центрального фринга является важной технической задачей, которая рассматривалась в ряде работ [112–115].

5.2.1 Метод ОАБРС с корректирующей фазой для КПН-часов

В качестве первого частного случая ОАБРС для КПН-резонансов рассмотрим схему, где стабилизируемый сопутствующий параметр есть дополнительный сдвиг относительной фазы бихроматического поля в течение действия второго рамсеевского импульса, то есть $\xi = \phi_c$. Корректирующую фазу, $\phi_c = \bar{\phi}_c$, для которой полевой сдвиг стабилизируемой частоты отсутствует ($\bar{\delta}_{\mathrm{clock}} = 0$), можно найти из уравнения (5.27). Сравнение традиционной рамсеевской спектроскопии и ОАБРС с корректирующей фазой для различных значений полевого сдвига Δ_{sh} часового перехода показано на рисунке 5.4. Для удобства определим частотные параметры в единицах полуширины на полувысоте стационарного КПН-резонанса γ_{CPT} (см.

выражение 4.23), выражение для которой в случае слабого поля имеет следующий вид:

$$\gamma_{\mathrm{CPT}} \approx \left(\Gamma + \frac{\left|\Omega_1\right|^2 + \left|\Omega_2\right|^2}{\gamma_{\mathrm{opt}}} \right). \tag{5.31}$$

В расчетах предполагается, что во время первого импульса Рамсея атомы накачиваются в стационарное состояние (то есть формально $\tau_{\mathrm{p}} = \infty$), что на практике соответствует условию $\tau_{\mathrm{p}} \gg \gamma_{\mathrm{CPT}}^{-1}$. Как следует из уравнений (5.19) и (5.27), длительность и форма рамсеевского импульса накачки могут влиять только на значение сопутствующего параметра $\bar{\xi}$ и на наклон сигналов ошибки, а подавление полевого сдвига ($\bar{\delta}_{\mathrm{clock}} = 0$) не зависит параметров импульса. Рисунок 5.4(d) демонстрирует высокую эффективность данной ОАБРС схемы подавления полевого сдвига сигнала ошибки $S_{\mathrm{err}}^{(T_1)}(\delta_{\mathrm{R}}, \bar{\phi}_c)$, который используется для стабилизации частоты локального осциллятора. Зависимость корректирующей фазы $\bar{\phi}_c$ от времени детектирования спектроскопического сигнала τ_{d} показана на рисунке 5.5(a). На рисунке 5.5(b) представлена зависимость корректирующей фазы $\bar{\phi}_c$ от сдвига частоты часового перехода Δ_{sh}. При условии $\tau_{\mathrm{d}} \gg \gamma_{\mathrm{CPT}}^{-1}$ данная зависимость хорошо описывается формулой:

$$\bar{\phi}_c(\Delta_{\mathrm{sh}}) \approx -2\arctan(\Delta_{\mathrm{sh}}/\gamma_{\mathrm{CPT}}). \tag{5.32}$$

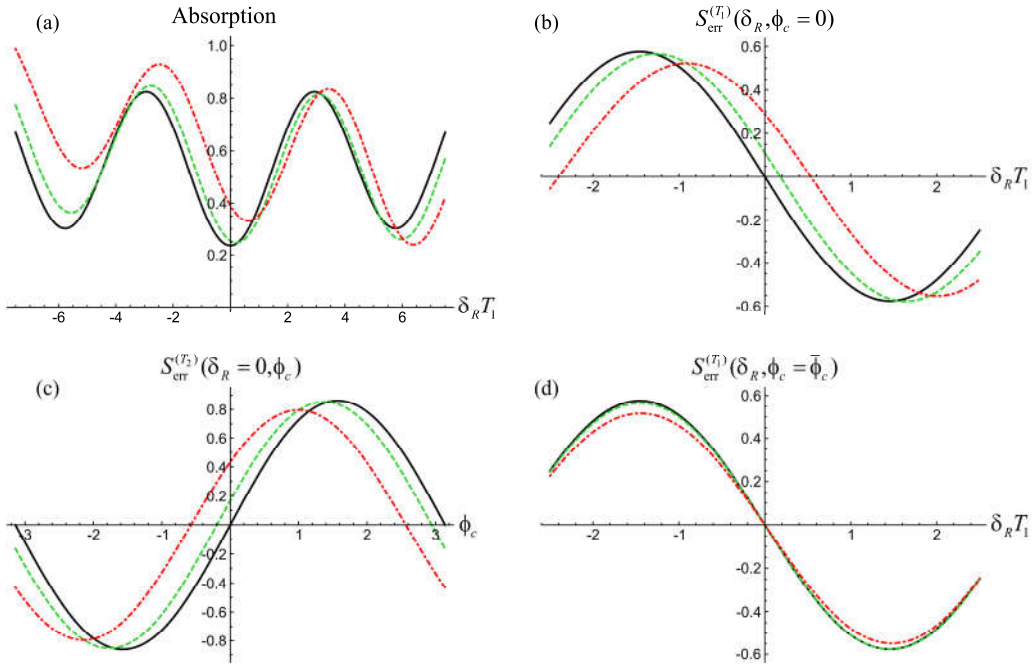

Рисунок 5.4 – (a) КПН рамсеевские фринги. (b) Сигнал ошибки $S_{\rm err}^{(T_1)}(\delta_R, \phi_c = 0)$ в традиционной рамсеевской схеме. (c) Сигнал ошибки $S_{\rm err}^{(T_2)}(\bar{\delta}_R = 0, \phi_c)$ для стабилизации корректирующей фазы. (d) Сигнал ошибки $S_{\rm err}^{(T_1)}(\delta_R, \phi_c = \bar{\phi}_c)$ для стабилизации рамановской отстройки в автобалансной рамсеевской схеме с корректирующей фазой. Численные зависимости рассчитаны для следующих значений полевого сдвига рамановского перехода: $\Delta_{\rm sh}/\gamma_{\rm CPT} = 0$ (черная сплошная линия), $\Delta_{\rm sh}/\gamma_{\rm CPT} = 0.1$ (зеленая пунктирная линия) и $\Delta_{\rm sh}/\gamma_{\rm CPT} = 0.3$ (красная точечно-пунктирная линия). Другие параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.25\gamma_{\rm sp}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\rm sp}/2$, $\gamma_{\rm opt} = 50\gamma_{\rm sp}$, $\Gamma = 5\times10^{-5}\gamma_{\rm sp}$, $T_1 = 0.5\Gamma^{-1}$, $T_2 = 0.1\Gamma^{-1}$, $\tau_{\rm p} = \infty$ (стационарное состояние), $\tau_{\rm d} = 5\gamma_{\rm CPT}^{-1}$, $\alpha_r^{\pm} = \pm\,\pi/2$.

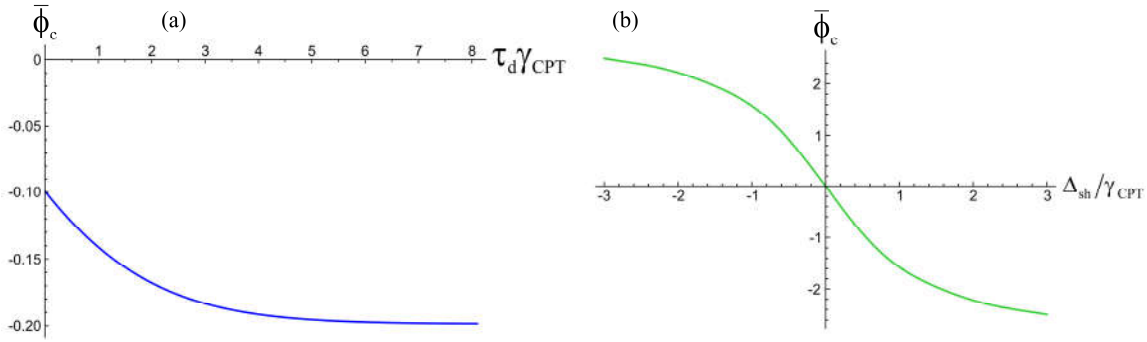

Рисунок 5.5 – (a) Зависимость корректирующей фазы $\bar{\phi}_c$ от времени детектирования $\tau_{\rm d}$ при $\Delta_{\rm sh}/\gamma_{\rm CPT} = 0.1$. (b) Зависимость корректирующей фазы $\bar{\phi}_c$ от сдвига частоты часового перехода $\Delta_{\rm sh}$ при $\tau_{\rm d} = 5\gamma_{\rm CPT}^{-1}$. Другие параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.25\gamma_{\rm sp}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\rm sp}/2$, $\gamma_{\rm opt} = 50\gamma_{\rm sp}$, $\Gamma = 5\times10^{-5}\gamma_{\rm sp}$, $T_1 = 0.5\Gamma^{-1}$, $T_2 = 0.1\Gamma^{-1}$, $\tau_{\rm p} = \infty$ (стационарное состояние), $\alpha_r^{\pm} = \pm\,\pi/2$.

5.2.2 Метод ОАБРС с компенсирующим частотным прыжком для КПН-часов

В качестве другого частного случая ОАБРС для КПН-резонансов, рассмотрим автобалансную схему, где сопутствующий стабилизируемый параметр является дополнительным прыжком в разности частот $(\omega_1 - \omega_2)$ в течение действия обоих рамсеевских импульсов, то есть $\xi = \Delta_c$. Частотный прыжок $(\Delta_c = \overline{\Delta}_c)$, который полностью подавляет полевой сдвиг $(\overline{\delta}_{\text{clock}} = 0)$, может быть найден из уравнения (5.27). На рисунке 5.6(a) показаны сигналы ошибки для традиционной рамсеевской схемы при различных значениях полевого сдвига Δ_{sh}. Графики сигналов ошибки для стабилизации сопутствующего параметра Δ_c представлены на рисунке 5.6(b). Рисунок 5.6(c) демонстрирует сигналы ошибки для частотной стабилизации, когда $\Delta_c = \overline{\Delta}_c$. По сравнению с ОАБРС с корректирующей фазой, здесь сигналы ошибки $S_{\text{err}}^{(T_1)}(\delta_{\text{R}}, \Delta_c = \overline{\Delta}_c)$ для различных значений Δ_{sh} полностью совпадают и имеют антисимметричные формы. Также следует отметить, что значение стабилизируемого сопутствующего параметра $\overline{\Delta}_c$ не зависит от времени детектирования τ_{d}. Зависимость частотного прыжка $\overline{\Delta}_c$ от полевого сдвига является линейной: $\overline{\Delta}_c = \Delta_{\text{sh}}$ (см. рисунок 5.6(d)).

В теории, оба варианта ОАБРС приводят к одинаковому результату, при котором полевой сдвиг полностью подавлен. Однако, на практике эффективности этих методов могут быть различными. Поэтому, экспериментальное сравнение этих двух схем при измерении девиации Аллана вызывает большой интерес.

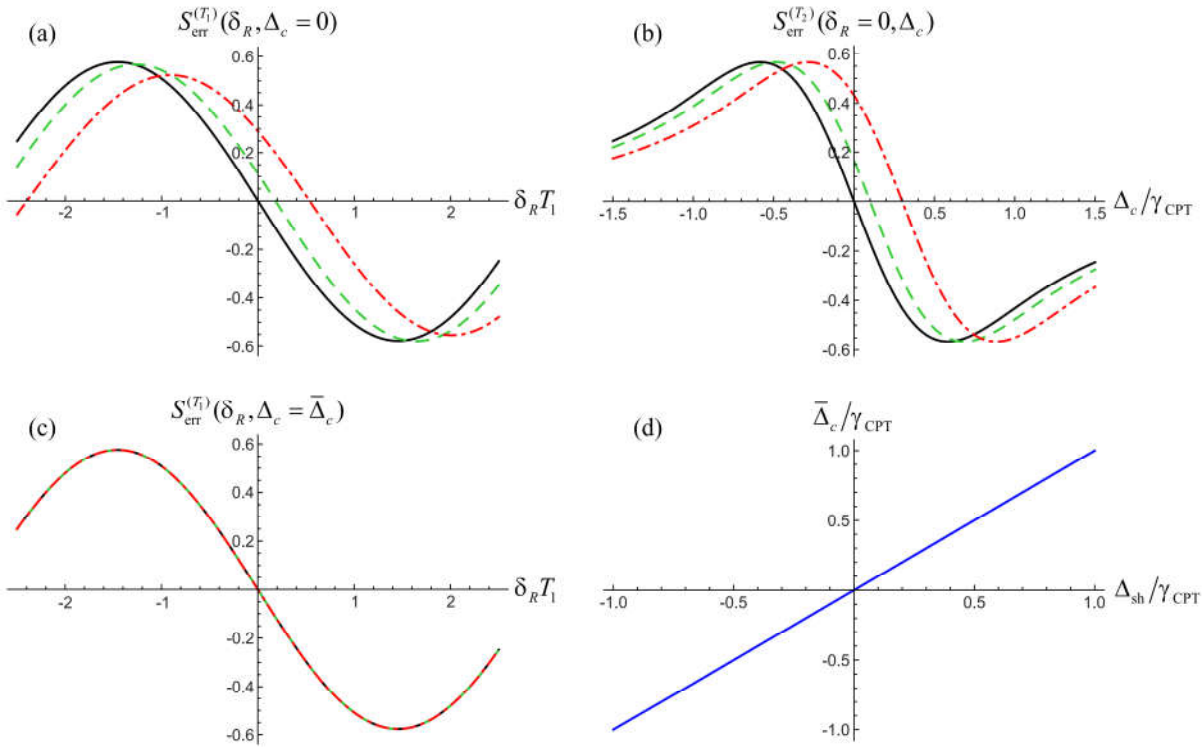

Рисунок 5.6 – (a) Сигнал ошибки $S_{\rm err}^{(T_1)}(\delta_R, \Delta_c = 0)$ в традиционной рамсеевской схеме. (b) Сигнал ошибки $S_{\rm err}^{(T_2)}(\bar{\delta}_R = 0, \Delta_c)$ для стабилизации компенсирующего частотного прыжка Δ_c. (c) Сигнал ошибки $S_{\rm err}^{(T_1)}(\delta_R, \Delta_c = \bar{\Delta}_c)$ для стабилизации рамановской отстройки в автобалансной рамсеевской схеме с компенсирующим частотным прыжком. (d) Зависимость частотного прыжка $\bar{\Delta}_c$ от сдвига частоты часового перехода $\Delta_{\rm sh}$. Численные зависимости (a)-(c) рассчитаны для следующих значений полевого сдвига рамановского перехода: $\Delta_{\rm sh}/\gamma_{\rm CPT} = 0$ (черная сплошная линия), $\Delta_{\rm sh}/\gamma_{\rm CPT} = 0.1$ (зеленая пунктирная линия) и $\Delta_{\rm sh}/\gamma_{\rm CPT} = 0.3$ (красная точечно-пунктирная линия). Другие параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.25\gamma_{\rm sp}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\rm sp}/2$, $\gamma_{\rm opt} = 50\gamma_{\rm sp}$, $\Gamma = 5\times10^{-5}\gamma_{\rm sp}$, $T_1 = 0.5\Gamma^{-1}$, $T_2 = 0.1\Gamma^{-1}$, $\tau_{\rm p} = \infty$ (стационарное состояние), $\tau_{\rm d} = 5\gamma_{\rm CPT}^{-1}$, $\alpha_r^{\pm} = \pm\,\pi/2$.

5.3 Метод комбинированного сигнала ошибки (КСО) для КПН-резонансов

Протокол комбинированного сигнала ошибки (КСО) часовых переходов был предложен в [97]. Ниже будет представлено доказательство применимости данного метода в рамках трехуровневой Λ-системы.

Этот подход основывается на возбуждении и опросе атомов при применении двух последовательностей рамсеевских импульсов с различными временами

свободной эволюции T_1 и T_2. Однако, в отличие от ОАБРС, здесь используется только одна петля обратной связи. В данном случае, сигнал ошибки для стабилизации частоты формируется как линейная суперпозиция двух обычных сигналов ошибки, полученных отдельно для каждой рамсеевской последовательности:

$$S_{\mathrm{err}}^{(\mathrm{KCO})}(\delta_{\mathrm{R}}) = S_{\mathrm{err}}^{(T_1)}(\delta_{\mathrm{R}}) - \beta_{\mathrm{cal}} S_{\mathrm{err}}^{(T_2)}(\delta_{\mathrm{R}}), \tag{5.33}$$

где β_{cal} есть некоторый калибровочный коэффициент. Стабилизируемая частота локального осциллятора соответствует условию, когда комбинированный сигнал ошибки равен нулю: $S_{\mathrm{err}}^{(\mathrm{KCO})}(\delta_{\mathrm{R}}) = 0.$ Подставляя выражение (5.19) в формулу (5.33), получаем

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{err}}^{(\mathrm{KCO})}(\delta_{\mathrm{R}}) = e^{-\Gamma T_1}[\int_{t_2}^{t_2+\tau_{\mathrm{d}}} \left(\boldsymbol{\Omega}(t), \hat{W}_{\mathrm{d}}(t) \hat{\Upsilon}_{T_1} \hat{W}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{in}} \right) \mathrm{d}t - \\ - \beta_{\mathrm{cal}} e^{\Gamma(T_1 - T_2)} \int_{t_2}^{t_2+\tau_{\mathrm{d}}} \left(\boldsymbol{\Omega}(t), \hat{W}_{\mathrm{d}}(t) \hat{\Upsilon}_{T_2} \hat{W}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{in}} \right) dt]. \end{aligned} \tag{5.34}$$

При выборе калибровочного коэффициента равным

$$\beta_{\mathrm{cal}} = e^{-\Gamma(T_1 - T_2)}, \tag{5.35}$$

выражение для комбинированного сигнала ошибки (5.34) может быть записано следующим образом

$$S_{\mathrm{err}}^{(\mathrm{KCO})}(\delta_{\mathrm{R}}) = e^{-\Gamma T_1} \int_{t_2}^{t_2+\tau_{\mathrm{d}}} \left(\boldsymbol{\Omega}(t), \hat{W}_{\mathrm{d}}(t) (\hat{\Upsilon}_{T_1} - \hat{\Upsilon}_{T_2}) \hat{W}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{in}} \right) dt. \tag{5.36}$$

Принимая во внимание равенство (5.26) для матриц $\hat{\Upsilon}_{T_1}$ и $\hat{\Upsilon}_{T_2}$ при $\delta_{\mathrm{R}} = 0,$ из (5.36) получаем

$$S_{\mathrm{err}}^{(\mathrm{KCO})}(0) = 0. \tag{5.37}$$

Следовательно, проведенный анализ доказывает отсутствие полевого сдвига для частоты гетеродина, стабилизированной в нуле комбинированного сигнала ошибки (5.33) с калибровочным коэффициентом (5.35).

На рисунке 5.7 показаны сигналы ошибки для традиционной рамсеевской схемы при двух различных временах свободной эволюции $(T_1/T_2 = 10)$ и комбинированный сигнал ошибки. Видно, что для точного калибровочного

коэффициента β_{cal} полевой сдвиг для КСО полностью подавлен. Однако, в реальных условиях, β_{cal} может отличаться от идеального значения, что приводит к появлению остаточного сдвига для комбинированного сигнала ошибки. Тем не менее, как показывают расчеты (см. рисунок 5.8), даже при $\pm 5\%$ отклонении β_{cal} от идеального значения, КСО обеспечивает подавление полевого сдвига примерно в 15 раз большее, в сравнении с традиционной рамсеевской спектроскопией (с временем свободной эволюции T_1).

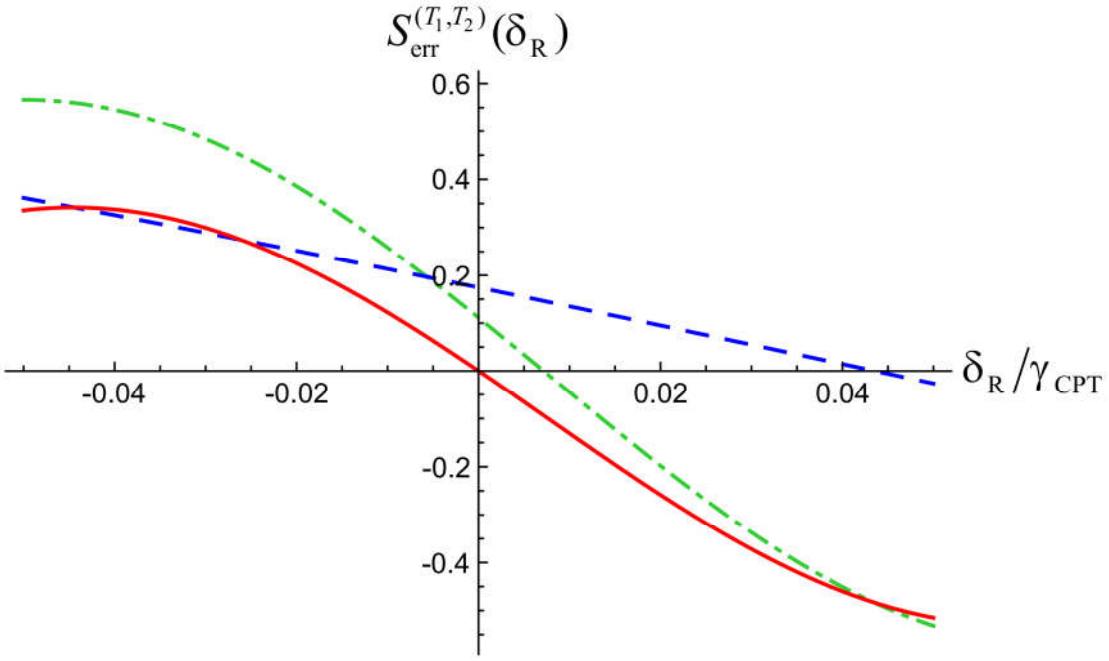

Рисунок 5.7 – Сигналы ошибки: зеленая точечно-пунктирная линия соответствует традиционной рамсеевской схеме для $T = 0.5\Gamma^{-1}$, голубая пунктирная линия – традиционной рамсеевской схеме для $T = 0.05\Gamma^{-1}$, красная сплошная линия соответствует комбинированному сигналу ошибки для $T_1 = 0.5\Gamma^{-1}$ и $T_2 = 0.05\Gamma^{-1}$. Другие параметры модели: $\Delta_{\text{sh}}/\gamma_{\text{CPT}} = 0.1$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.25\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{sp}}/2$, $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma = 5\times 10^{-5}\gamma_{\text{sp}}$, $\tau_{\text{p}} = \infty$ (стационарное состояние), $\tau_{\text{d}} = 5\gamma_{\text{CPT}}^{-1}$, $\alpha_r^{\pm} = \pm\pi/2$.

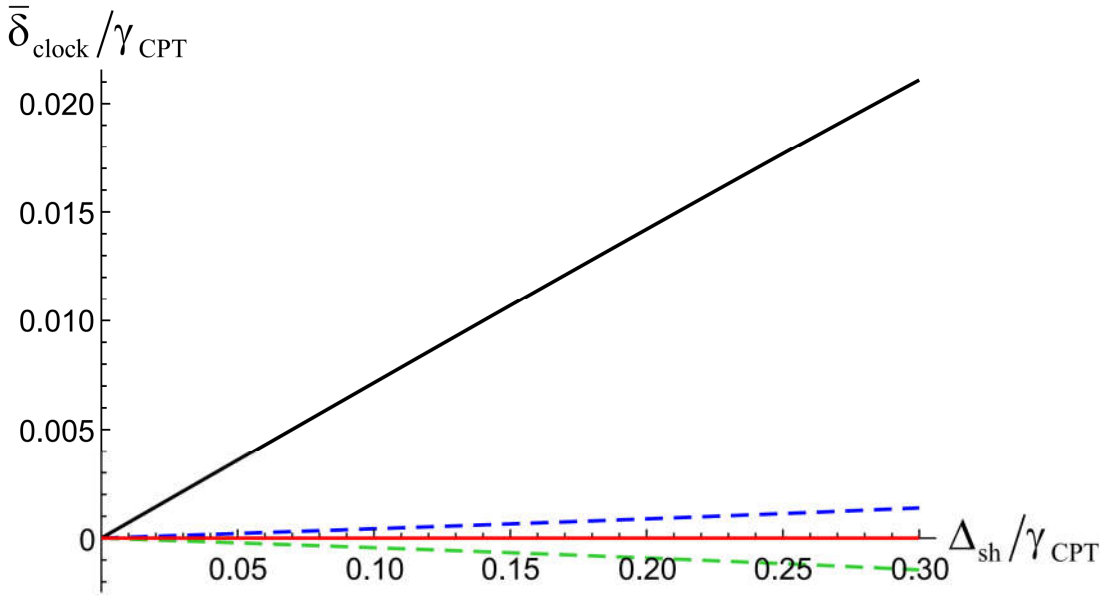

Рисунок 5.8 – Сдвиг часовой частоты $\bar{\delta}_{\text{clock}}$ в зависимости от полевого сдвига Δ_{sh}: черная сплошная линия рассчитана для традиционной рамсеевской схемы $(T = 0.5\Gamma^{-1})$; красная сплошная линия рассчитана для КСО $(T_1 = 0.5\Gamma^{-1}$ и $T_2 = 0.05\Gamma^{-1})$ в случае идеального значения калибровочного коэффициента β_{cal}; голубая пунктирная линия получена для КСО при отклонении β_{cal} на -5% от идеального значения; зеленая пунктирная линия получена для КСО при отклонении β_{cal} на +5% от идеального значения. Другие параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.25\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{sp}/2$, $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma = 5\times10^{-5}\gamma_{\text{sp}}$, $\tau_{\text{p}} = \infty$ (стационарное состояние), $\tau_{\text{d}} = 5\gamma_{\text{CPT}}^{-1}$, $\alpha_r^{\pm} = \pm\,\pi/2$.

5.4 Метод модифицированного комбинированного сигнала ошибки (МКСО) для КПН-резонансов

В данном разделе обсудим два варианта модифицированного комбинированного сигнала ошибки в рамсеевской спектроскопии (МКСО) КПН-резонансов. Главная идея данного спектроскопического метода заключается в объединении двух рамсеевских циклов с различными временами свободной эволюции в один цикл. Для достижения этой цели, будем использовать рамсеевскую последовательность, которая состоит из трех импульсов, разделенных временными интервалами с разными длительностями T_S и T_L, как показано на

рисунке 5.9. Первый импульс должен быть достаточно длительным, чтобы накачать атомы в темное состояние. Два последующих коротких импульса опрашивают атомы. Длительность первого детектирующего импульса должна быть достаточно короткой, чтобы не разрушить когерентность КПН-состояния. Спектроскопический сигнал (поглощения или пропускания) регистрируется для каждого детектирующего импульса, после чего вычисляется комбинированный сигнал ошибки как линейная суперпозиция обычных сигналов ошибки.

В первом варианте МКСО предлагается использовать детектирующие импульсы одинаковой длительности (см. рисунок 5.9(a)). Комбинированный сигнал ошибки имеет вид

$$S_{\mathrm{err}}^{(\text{МКСО-1})}(\delta_{\mathrm{R}}) = S_{\mathrm{err}}^{(T_L)}(\delta_{\mathrm{R}}) - \beta_{\mathrm{cal}}^{(\text{МКСО})} S_{\mathrm{err}}^{(T_S)}(\delta_{\mathrm{R}}), \tag{5.38}$$

где калибровочный коэффициент в соответствии с выражением (5.35) определяется как

$$\beta_{\mathrm{cal}}^{(\text{МКСО})} = e^{-\Gamma(T_L - T_S)}. \tag{5.39}$$

Во втором варианте МКСО предлагается использовать детектирующие импульсы разной длительности (см. рисунок 5.9(b)). Эта схема основана на том, что амплитуда сигнала ошибки пропорциональна длительности детектирующих импульсов при условии: $\tau_S,\ \tau_L \ll \gamma_{\mathrm{CPT}}^{-1}$. В этом случае сигнал ошибки рассчитывается как

$$S_{\mathrm{err}}^{(\text{МКСО-2})}(\delta_{\mathrm{R}}) = S_{\mathrm{err}}^{(T_L)}(\delta_{\mathrm{R}}) - S_{\mathrm{err}}^{(T_S)}(\delta_{\mathrm{R}}), \tag{5.40}$$

где отношение длительностей импульсов определяется калибровочным коэффициентом (5.39):

$$\frac{\tau_S}{\tau_L} = \beta_{\mathrm{cal}}^{(\text{МКСО})}, \tag{5.41}$$

где τ_S и τ_L – длительности первого и второго опросных импульсов соответственно.

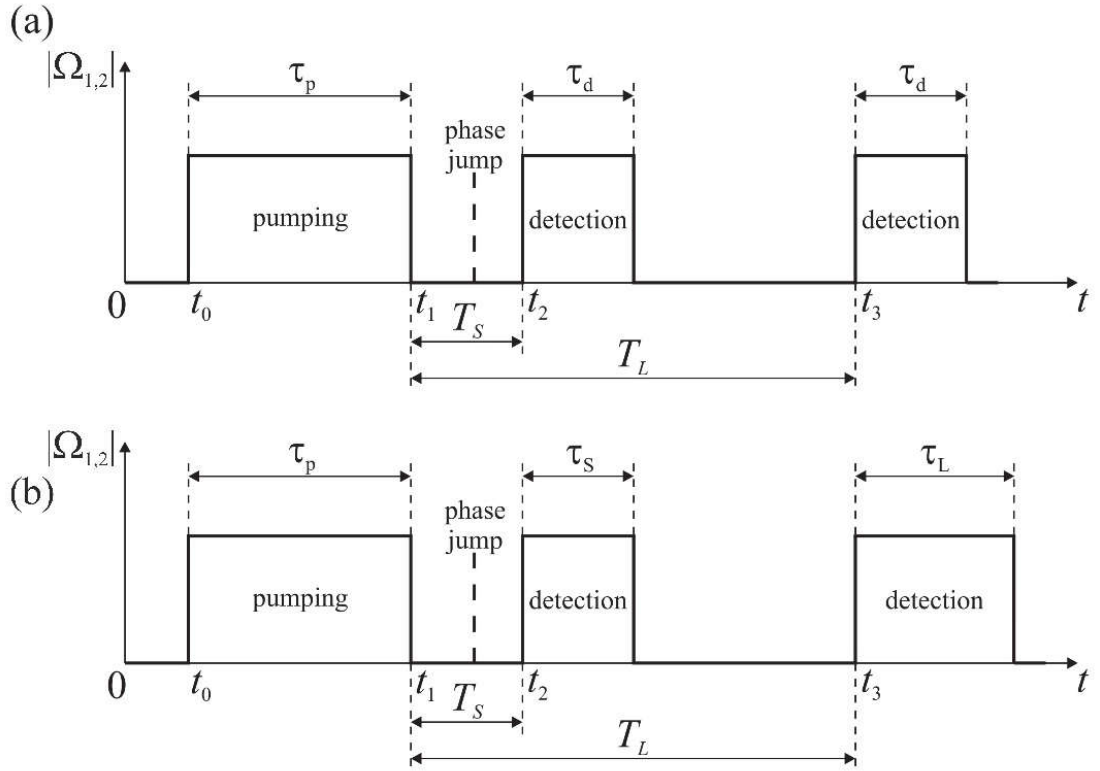

Рисунок 5.9 – Схема трех-импульсной последовательности рамсеевского типа. Первый импульс накачивает атомы в темное состояние. Два последующих импульса детектируют спектроскопическую информацию.

Фазовые прыжки должны выполняться до первого импульса детектирования. На рисунке 5.10 показано сравнение стандартной рамсеевской схемы и двух вариантов МКСО (см. рисунок 5.9). Из этих графиков видно, что даже при отклонениях калибровочного коэффициента (5.39) на ±5% данный метод обеспечивает значительное подавление полевого сдвига.

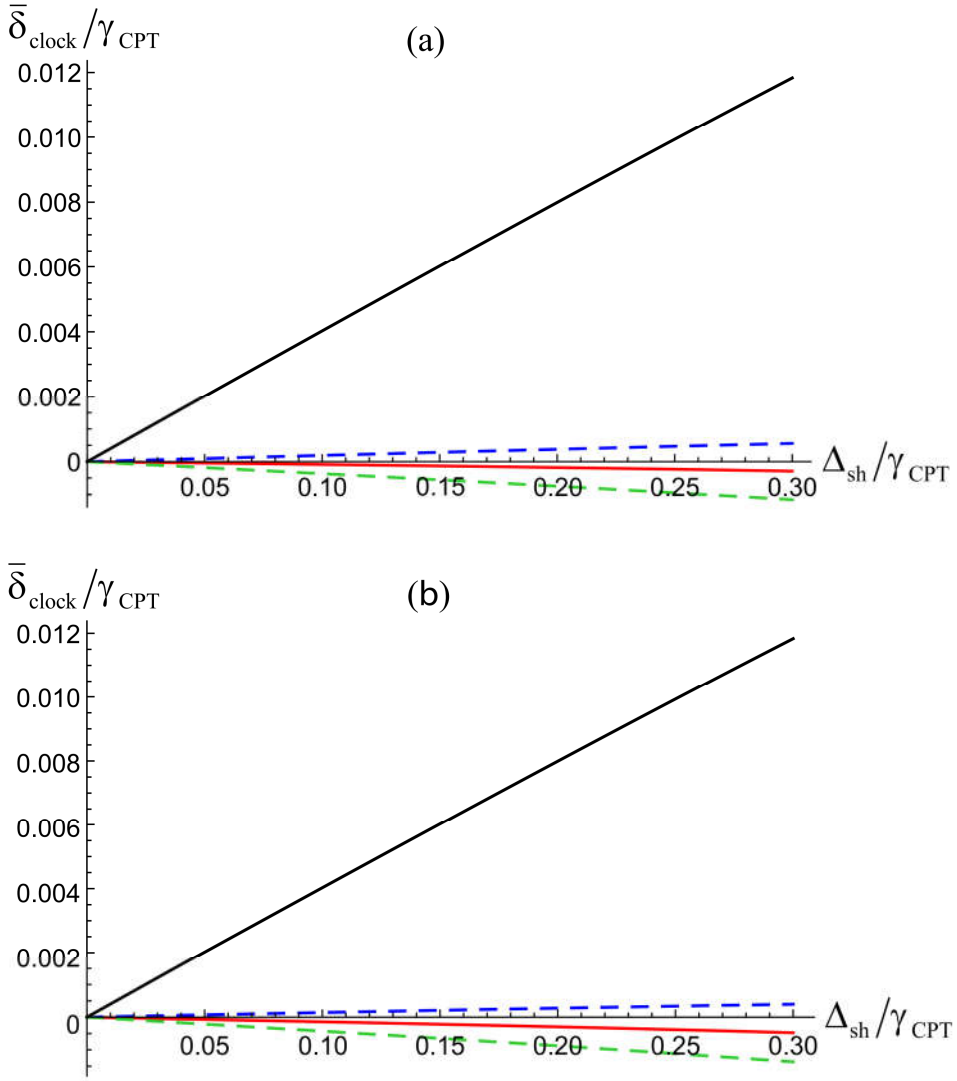

Рисунок 5.10 – Сдвиг часовой частоты $\bar{\delta}_{\text{clock}}$ в зависимости от полевого сдвига Δ_{sh} для МКСО: (a) – детектирующие импульсы одинаковой длительности; (b) детектирующие импульсов разной длительности. Черная сплошная линия рассчитана для традиционной рамсеевской схемы ($T = 0.5\Gamma^{-1}$), красная сплошная линия рассчитана для МКСО ($T_L = 0.5\Gamma^{-1}$ и $T_S = 0.05\Gamma^{-1}$) в случае идеального значения (4.39) калибровочного коэффициента $\beta_{\text{cal}}^{(\text{МКСО})}$, зеленая пунктирная линия рассчитывается для МКСО, если $\beta_{\text{cal}}^{(\text{МКСО})}$ отклоняется на +5% от идеального значения, а синяя пунктирная линия рассчитывается для МКСО, если $\beta_{\text{cal}}^{(\text{МКСО})}$ отклоняется на −5% от идеального значения. Другие параметры модели: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.25\gamma_{\text{sp}}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{sp}}/2$, $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$, $\Gamma = 5\times10^{-5}\gamma_{\text{sp}}$, $\tau_{\text{p}} = \infty$ (стационарное состояние), $\tau_{\text{d}} = \tau_S = 0.15\gamma_{\text{CPT}}^{-1}$, $\alpha_r^{\pm} = \pm\,\pi/2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе было проведено теоретическое исследование типа сверхузкого резонанса в зависимости от значений полных угловых моментов основного (F_g) и возбужденного (F_e) состояний замкнутого дипольного перехода вне рамок теории возмущений. В качестве модели рассматривалось взаимодействие двухуровневого атомарного газа, вырожденного по проекциям полного углового момента, с двухчастотным полем двух коллинеарных волн с произвольными эллиптическими поляризациями. Показано, что знак резонанса (электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭИП) или электромагнитно-индуцированной абсорбции (ЭИА)) не зависит от параметров эллиптичности и интенсивности волн. При этом резонанс ЭИА обусловлен формированием анизотропии в возбужденном состоянии и её спонтанным переносом в основное состояние на переходе $F_g = F \to F_e = F + 1$. В результате, было проведено подтверждение и обобщение ранее наведенной классификации циклических дипольных переходов по направлению сверхузкого резонанса для произвольной интенсивности и поляризации светового поля. “Темные” переходы есть переходы $F_g = F \to F_e = F$ и $F_g = F \to F_e = F - 1$, для которых наблюдаются резонансы ЭИП. С свою очередь, “яркими” являются переходы $F_g = F \to F_e = F + 1$, на которых возможно наблюдение ЭИА резонансов.

Проведено теоретическое исследование по оптимизации параметров частотной модуляции и фазы опорного сигнала для атомных часов, основанных на эффекте когерентного пленения населенностей (КПН). В качестве модели в случае КПН-часов рассматривалось взаимодействие бихроматического частотно-модулированного поля с трехуровневой атомной Λ-системой. Были сформулированы критерии квазистационарного и динамического откликов атомной системы, возбуждаемой внешним полем с гармонической частотной модуляцией. Показано, что оптимальный режим стабилизации частоты соответствуют динамическому режиму взаимодействия атомов с полем. Также

проведен анализ влияния низкочастотных шумов на выбор оптимальной частоты модуляции с целью повышения стабильности частоты часов. Для этого была рассмотрена модель шума, состоящего из белого шума (не зависящего от частоты) и фликкер-шума (шум $1/f$). Из расчетов следует, что оптимальное значение частоты модуляции сильно зависит от соотношения амплитуд этих шумов и смещается в более высокочастотную область. Данная высокочастотная область может трактоваться как КПН-аналог режима стабилизации Паунда-Древера-Холла. Полученные результаты находятся в хорошем качественном соответствии с различными экспериментами [68–70].

Рассмотрено влияние гауссова профиля интенсивности светового поля на форму линии КПН-резонанса с учетом пространственно-неоднородного полевого сдвига частоты атомных уровней. В качестве теоретической модели рассматривалась открытая Λ-система, в которой КПН-резонанс возбуждается бихроматическим полем с гауссовым поперечным профилем интенсивности. В случае замкнутой Λ-системы получено аналитическое выражение, описывающее резонансный контур, который имеет асимметричный вид. Обнаружено, что пространственная неоднородность полевого сдвига является источником асимметрии интегральной формы линии КПН-резонанса. Показано, что зависимость сдвига вершины темного резонанса от мощности светового поля является существенно нелинейной. Полученный результат имеет хорошее качественное соответствие с экспериментом [122]. Исследовано влияние пространственно-неоднородного профиля интенсивности лазерного излучения на полевой сдвиг сигнала ошибки. Анализ проводился для двух методов формирования сигнала ошибки: с использованием гармонической модуляции двухфотонной отстройки и с помощью ступенчатой модуляции относительной фазы компонент бихроматического поля. Установлено, что зависимость сдвига нуля сигнала ошибки от мощности лазерного поля в случае медленной модуляции имеет большую степень нелинейности по сравнению со случаем быстрой модуляцией. Причем в режиме быстрой модуляции данная зависимость практически совпадает для обоих методов формирования сигнала ошибки. Следует отметить, что

увеличение параметра открытости Λ-системы приводит к усилению этой нелинейности. На основе численных расчетов было показано, что использование апертуры для выделения центральной части светового пучка приводит к существенному уменьшению нелинейности полевого сдвига от мощности излучения. Такой подход позволит существенно улучшить долговременную стабильность атомных часов при использовании метода автокомпенсации полевого сдвига [82], эффективность которого повышается при уменьшении нелинейного вклада в зависимость полевого сдвига от мощности лазерного излучения.

Аналитически доказана применимость методов обобщенной автобалансной рамсеевской спектроскопии (ОАБРС) и комбинированного сигнала ошибки (КСО) для КПН-резонансов. Были проведены численные расчеты сигналов ошибки для двух частных случаев метода ОАБРС. В первом случае использовалось дополнительное изменение относительной фазы в течение действия второго рамсеевского импульса бихроматического поля. Во втором случае во время действия обоих рамсеевских импульсов применялся дополнительный сдвиг в рамановской отстройке для подавления полевого сдвига. Полученные расчетные зависимости полностью подтверждают аналитические результаты, и демонстрируют высокую эффективность подавления светового сдвига. Также были проведены численные вычисления зависимости сдвига положения нуля сигнала ошибки от полевого сдвига для КСО и МКСО. Потенциальным преимуществом МКСО по сравнению с КСО является уменьшение длительности одного цикла примерно в 2 раза, необходимой для коррекции стабилизированной частоты. Для КСО было показано, во-первых, что для точного калибровочного коэффициента полевой сдвиг подавлен полностью, а во-вторых, даже в случае ±5% отклонения калибровочного коэффициента от идеального значения (в реальных условиях), данный протокол обеспечивает подавление светового сдвига примерно в 15 раз большее, в сравнении с традиционной рамсеевской спектроскопией. Метод МКСО также обеспечивает существенное подавление полевого сдвига. Таким образом, была продемонстрирована высокая надежность данных спектроскопических схем (ОАБРС, КСО и МКСО), которая состоит в их высокой устойчивости к различным

искажениям формы импульсов, релаксационным процессам, ошибкам в формировании фазовых прыжков и т.д. Реализация методов ОАБРС и КСО позволит значительно улучшить долговременную стабильность (до уровня ниже, чем 10^{-14}) и точность КПН-часов. Указанные методы также могут быть применимы в атомных КПН-магнитометрах и интерферометрах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блум, К. Теория матрицы плотности и её приложения / К. Блум. – М.: Мир, 1983. – 248 с.

2. Белоусов, Ю.М. Матрица плотности. Представления и применения в статистической механике / Ю.М. Белоусов, В.И. Манько. – М.: МФТИ, 2004. – 163 с.

3. Демтредер, В. Лазерная спектроскопия / В. Демтредер. – М.: Наука, 1985. – 608 с.

4. Раутиан, С.Г. Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул / С.Г. Раутиан, Г.И. Смирнов, А.М. Шалагин. – Новосибирск: Наука, 1979. – 311 с.

5. Летохов, В.С. Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения / В.С. Летохов, В.П. Чеботаев. – Москва: Наука, 1990. – 512 с.

6. Hall, J.L. Nobel Lecture: Defining and measuring optical frequencies / J.L. Hall // Rev. Mod. Phys. – 2006. – V.78. – P.1279-1295.

7. Hänsch, T.W. Nobel Lecture: Passion for precision / T.W. Hänsch // Rev. Mod. Phys. – 2006. – V.76. – P.1297-1309.

8. Agarwal, G.S. Realization of trapping in a two-level system with frequency-modulated fields / G.S. Agarwal, W. Harshawardhan // Phys. Rev. A. – 1994. – V.50. – R4465 (3 pages).

9. Knappe, S. A chip-scale atomic clock based on ^{87}Rb with improved frequency stability / S. Knappe [et al.] // Opt. Express. – 2005. – V.13. – P.1249-1253.

10 Post, A.B. Amplitude- versus frequency-modulated pumping light for coherent population trapping resonances at high buffer-gas pressure / A. B. Post [et al.] // Phys. Rev. A. – 2005. – V.72. – 033417 (2005).

11. Gawlik, N.W. Nonlinear magneto-optical rotation with amplitude modulated light / N.W. Gawlik [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2006. – V.88. – 131108 (3 pages).

12. Acosta, V. Nonlinear magneto-optical rotation with frequency-modulated light in the geophysical field range / V. Acosta [et al.] // Phys. Rev. A. – 2006. – V.73. – 053404 (8 pages).

13. Schwindt, P.D.D. Chip-scale atomic magnetometer with improved sensitivity by use of the M_x technique / P.D.D. Schwindt [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2007. – V.90. – 081102 (3 pages).

14. Jau, Y.-Y. Push-pull optical pumping of pure superposition states / Y.-Y. Jau [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2004. – V.93. – 160802 (4 pages).

15. Jau, Y.-Y. Push-pull laser-atomic oscillator / Y.-Y. Jau, W. Happer // Phys. Rev. Lett. – 2007. – V.99. – 223001 (4 pages).

16. Pustelny, S. Nonlinear magneto-optical rotation with modulated light in tilted magnetic fields / S. Pustelny [et al.] // Phys. Rev. A. – 2006. – V.74. – 063420 (5 pages).

17. Ben-Kish, A. Dead-zone-free atomic magnetometry with simultaneous excitation of orientation and alignment resonances / A. Ben-Kish, M.V. Romalis // Phys. Rev. Lett. – 2010. – V.105. – 193601 (4 pages).

18. Yun, P. High-performance coherent population trapping clock with polarization modulation / P. Yun [et al.] // Phys. Rev. Appl. – 2017. – V.7. – 014018 (12 pages).

19. Breschi, E. A high-sensitivity push-pull magnetometer / E. Breschi [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2014. – V.104. – 023501 (5 pages).

20. Petrenko, M.V. Single-Beam all-optical nonzero-field magnetometric sensor for magnetoencephalography applications / M.V. Petrenko, A.S. Pazgalev, A.K. Vershovskii // Phys. Rev. Applied. – 2021. – V.15. – 064072.

21. Alzetta, G. An experimental method for the observation of r.f. transitions and laser beat resonances in oriented Na vapour / G. Alzetta [et al.] // Nuovo Cim. B. – 1976. – V.36. – P.5-20.

22. Harris, S.E. Electromagnetically induced transparency / S.E. Harris // Physics Today. – 1997. – V.50. – P.36-42.

23. Akulshin, A.M. Electromagnetically induced absorption and transparency due to resonant two-field excitation of quasidegenerate levels in Rb vapor / A.M. Akulshin, S. Barreiro, A. Lezama // Phys. Rev. A. – 1998. – V.57. – P.2996-3002.

24. Arimondo, E. Nonabsorbing atomic coherences by coherent two-photon transitions in a three-level optical pumping / E. Arimondo, G. Orriols // Lett. Nuovo Cim. – 1976. – V.17. – P.333-338.

25. Смирнов, В.С. Стационарные когерентные состояния атомов при резонансном взаимодействии с эллиптически поляризованным светом. Когерентное пленение населенностей: (Общая теория) / В.С. Смирнов., А.М. Тумайкин, В.И. Юдин // ЖЭТФ. – 1989. – Т.96. – С.1613-1628.

26. Агапьев, Б.Д. Когерентное пленение населенностей в квантовых системах / Б.Д. Агапьев [и др.] // УФН. – 1993. – Т.163. – С.1-36.

27. Arimondo, E. Coherent population trapping in laser spectroscopy / E. Arimondo // Prog. Opt. – 1996. – V.35. – P.257-354.

28. Taichenachev, A.V. Electromagnetically induced absorption in a four-state system / A.V. Taichenachev, A.M. Tumaikin, V.I. Yudin // Phys. Rev. A. – 1999. – V.61. – 011802(R) (4 pages).

29. Erhard, M. Buffer-gas effects on dark resonances: Theory and experiment / M. Erhard, H. Helm // Phys. Rev. A. – 2001. – V.63. – 043813 (13 pages).

30. Balabas, M.V. Polarized Alkali-Metal Vapor with Minute-Long Transverse Spin-Relaxation Time / M.V. Balabas [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2010. – V.105. – 070801 (4 pages).

31. Lee, H.J. Magnetic-field-induced absorption with sub-milligauss spectral width in paraffin-coated rubidium vapor cell / H.J. Lee, H.S. Moon // J. Opt. Soc. Am. B. – 2013. – V.30. – P.2301-2305.

32. Fleischhauer, M. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media / M. Fleischhauer, A. Imamoglu, J.P. Marangos // Rev. Mod. Phys. – 2005. – V.**77**. – P.633-673.

33. Pradhan, S. Polarization rotation under two-photon Raman resonance for magnetometry // S. Pradhan, R. Behera, A.K. Das // Appl. Phys. Lett. – 2012. – V.100. – 173502 (3 pages).

34. Mikhailov, E.E. Large negative and positive delay of optical pulses in coherently prepared dense Rb vapor with buffer gas / E.E. Mikhailov [et al.] // Phys. Rev. A. – 2004. – V.69. – 063808 (5 pages).

35. Vanier, J. Atomic clocks based on coherent population trapping: a review / J. Vanier // Appl. Phys. B. – 2005. – V.81. – P.421-442.

36. Shah, V. Advances in coherent population trapping for atomic clocks / V. Shah, J. Kitching // Adv. At. Mol. Opt. Phys. – 2010. – V.59. – P.21-74.

37. Brazhnikov, D. Electromagnetically induced absorption scheme for vapor-cell atomic clock / D. Brazhnikov [et al.] // Opt. Express. – 2019. – V.27. – P.36034-36045.

38. Maleki, L. Applications of clocks and frequency standards: from the routine to tests of fundamental models / L. Maleki, J. Prestage // Metrologia. – 2005. – V.42. – S145.

39. Фриц, Р. Стандарты частоты: принципы и приложения / Р. Фриц. – Физматлит, 2009. – 511 с.

40. Prestage, J.D. Atomic clocks and oscillators for deep-space navigation and radio science / J.D. Prestage, G.L. Weaver // Proc. IEEE. – 2007. – V.95. – P.2235-2247.

41. Derevianko, A. Hunting for topological dark matter with atomic clocks / A. Derevianko, M. Pospelov // Nat. Phys. – 2014. – V.10. – P.933-936.

42. Vanier, J. The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards: Recent Developments // J. Vanier, C. Tomescu. – CRC Press, 2015. – 486 p.

43. Lisdat, C. A clock network for geodesy and fundamental science / C. Lisdat [et al.] // Nat. Commun. – 2016. – V.7. – 12443 (7 pages).

44. Bock, Y. Physical applications of GPS geodesy: a review / Y. Bock, D. Melgar // Rep. Prog. Phys. – 2016. – V.79. – 106801 (119 pages).

45. Mehlstäubler, T.E. Atomic clocks for geodesy / T.E. Mehlstäubler [et al.] // Rep. Prog. Phys. – 2018. – V.81. – 064401 (49 pages).

46. Safronova, M.S. The Search for Variation of Fundamental Constants with Clocks / M.S. Safronova // Ann. Phys. – 2019. – V.531. – 1800364 (9 pages).

47. Godone, A. High-performing vapor-cell frequency standards / A. Godone [et al.] // Riv. Nuovo Cim. – 2015. – V.38. – P.133-171.

48. Kajita, M. Measuring Time: Frequency Measurements and Related Developments in Physics / M. Kajita. – IOP Publishing, Bristol, UK, 2018. – 19 p.

49. Ludlow, A.D. Optical atomic clocks / A.D. Ludlow [et al.] // Rev. Mod. Phys. – 2015. – V.87. – P.637-701.

50. Poli, N. Optical atomic clocks / N. Poli [et al.] // Rivista Del Nuovo Cimento. – 2013. – V.36. – P.555-624.

51. Lutwak, R. The miniature atomic clock – pre-production results / R. Lutwak [et al.] // Proc. IEEE International Frequency Control Symposium and European Frequency and Time Forum Geneva, Switzerland. – 2007. – P.1327-1333.

52. Wang, Z. Review of chip-scale atomic clocks based on coherent population trapping / Z. Wang // Chin. Phys. B. – 2014. – V.23. – 030601 (12 pages).

53. Kitching, J. Chip-scale atomic devices / J. Kitching // Appl. Phys. Rev. – 2018. – V.5. – 031302 (38 pages).

54. Скворцов, М.Н. Миниатюрный квантовый стандарт частоты на основе явления когерентного пленения населённостей в парах атомов ^{87}Rb / М.Н. Скворцов [и др.] // Квантовая электроника. – 2020. – Т.50, №6. – С.576–580.

55. Guo, T. Atomic clock based on transient coherent population trapping / T. Guo [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2009. – V.94. – 151108 (3 pages).

56. Li, D. A frequency standard via spectrum analysis and direct digital synthesis / D. Li [et al.] // Appl. Phys. Express. – 2014. – V.7. – 112203.

57. Литвинов, А.Н. Влияние движения атомов и столкновений с антирелаксационным покрытием стенок газовых ячеек на форму и сдвиг резонанса когерентного пленения населенностей / А.Н. Литвинов, И.М. Соколов // Письма в ЖЭТФ – 2021. – Т.113. – С.791-796.

58. Баранцев, К.А. Особенности совместного влияния движения атомов и сверхтонкого расщепления возбужденного состояния на форму резонанса когерентного пленения населенностей в разреженном газе / К.А. Баранцев, А.С. Курапцев, А.Н. Литвинов // ЖЭТФ. – 2021. – Т.160, №5(11) – С.611-620.

59. Фофанов, Я.А. Электромагнитно-индуцированная прозрачность в газовых ячейках с антирелаксационным покрытием / Я.А. Фофанов, И.М. Соколов // ЖЭТФ. – 2022. – Т.162. – №3. – С.297-306.

60. Баранцев, К.А. Форма спектра и световой сдвиг резонанса когерентного пленения населенностей в ячейках с антирелаксационным покрытием стенок в моделях зеркального и диффузного отражения / К.А. Баранцев [и др.] // ЖЭТФ – 2023. – Т.163. – С.162-171.

61. Knappe, S. Simple parameterization of dark-resonance line shapes / S. Knappe [et al.] // Appl. Phys. B. – 2003. – V.76. – P.57-63.

62. Levi, F. Line-shape of dark line and maser emission profile in CPT / F. Levi [et al.] // Eur. Phys. J. D. – 2000. – V.12. – P.53-59.

63. Berberian, J. Methods for reducing microwave resonance asymmetry in coherent-population-trapping based frequency standards / J. Berberian, L. Cutler, M. Zhu // Proceedings of the 2004 IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition. – 2004. – P.137-143.

64. Phillips, D.F. Modulation-induced frequency shifts in a coherent-population-trapping-based atomic clock / D.F. Phillips [et al.] // J. Opt. Soc. Am. B. – 2005. – V.22. – P.305-310.

65. Yin, Y. The light shift of a chip-scale atomic clock affected by asymmetrical multi-chromatic laser fields / Y. Yin [et al.] // Spectrosc. Lett. – 2017. – V.50. – P.227-231.

66. Basalaev, M.Yu. Dynamic continuous-wave spectroscopy of coherent population trapping at phase-jump modulation / M.Yu. Basalaev [et al.] // Phys. Rev. Appl. – 2020. – V.13. – 034060 (10 pages).

67. Taichenachev, A.V. Nonlinear-resonance line shapes: Dependence on the transverse intensity distribution of a light beam / A.V. Taichenachev [et al.] // Phys. Rev. A. – 2004. – V.69. – 024501 (4 pages).

68. Ben-Aroya, I. Optimization of FM spectroscopy parameters for a frequency locking loop in small scale CPT based atomic clocks / I. Ben-Aroya, M. Kahanov, G. Eisenstein // Opt. Express. – 2007. – V.15. – P.15060-15065.

69. Kahanov, M. Dependence of small-scale atomic clock performance on frequency modulation parameters used in the frequency control loop / M. Kahanov, I. Ben-Aroya, G. Eisenstein // Opt. Lett. – 2008. – V.33. – P.944-946.

70. Mikhailov, E.E. Performance of a prototype atomic clock based on lin||lin coherent population trapping resonances in Rb atomic vapor / E.E. Mikhailov // J. Opt. Soc. Am. B. – 2010. – V.27. – P.417-422.

71. Барашев, В.А. Взаимодействие стоячей частотно-модулированной волны с газом двухуровневых молекул / В.А. Барашев, В.М. Семибаламут, Е.А. Титов // Квант. электрон. – 1979. – Т.6, №2. – С.261-266.

72. Bjorklund, G.C. Frequency modulation (FM) spectroscopy. Theory of lineshapes and signal-to-noise analysis / G.C. Bjorklund, M.D. Levenson // Appl. Phys. B. – 1983. – V.32. – P.145-152.

73. Jaatinen, E. Theoretical determination of maximum signal levels obtainable with modulation transfer spectroscopy / E. Jaatinen // Opt. Commun. – 1995. – V.120. – P.91-97.

74. Курбатов, А.А. Взаимодействие частотно-модулированной волны с газом в пролетной области / А.А Курбатов, А.А. Луговой, Е.А. Титов // Оптика и спектроскопия. – 2006. – Т.100, №3. – С.400-403.

75. Eble, J.F. Optimization of frequency modulation transfer spectroscopy on the calcium 4^1S_0 to 4^1P_1 transition / J.F. Eble, F. Schmidt-Kaler // Appl. Phys. B. – 2007. – V.88. – P.563-568.

76. Shah, V. Continuous light-shift correction in modulated coherent population trapping clocks / V. Shah [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2006. – V.89. – 151124 (3 pages).

77. McGuyer, B.H. Simple method of light-shift suppression in optical pumping systems / B.H. McGuyer, Y.-Y. Jau, W. Happer // Appl. Phys. Lett. – 2009. – V.94. – 251110 (3 pages).

78. Boudot, R. Coherent population trapping resonances in Cs–Ne vapor microcells for miniature clocks applications / R. Boudot [et al.] // J. Appl. Phys. – 2011. – V.109. – 014912 (11 pages).

79. Zhang, Y. Rubidium chip-scale atomic clock with improved long-term stability through light intensity optimization and compensation for laser frequency detuning / Y. Zhang [et al.] // J. Opt. Soc. Amer. B. – 2016. – V.33. – P.1756-1763.

80. Vaskovskaya, M.I. Effect of the buffer gases on the light shift suppression possibility / M.I. Vaskovskaya [et al.] // Opt. Express. – 2019. – V.27. – P.35856-35864.

81. Yanagimachi, S. Reducing frequency drift caused by light shift in coherent population trapping-based low-power atomic clocks / S. Yanagimachi [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2020. – V.116. – 104102 (5 pages).

82. Yudin, V.I. General methods for suppressing the light shift in atomic clocks using power modulation / V.I. Yudin [et al.] // Phys. Rev. Appl. – 2020. – V.14. – 024001 (8 pages).

83. Abdel Hafiz, M. Protocol for Light-Shift Compensation in a Continuous-Wave Microcell Atomic Clock / M. Abdel Hafiz [et al.] // Phys. Rev. Appl. – 2020. – V.14 – 034015 (9 pages).

84. Yudin, V.I. Method for stabilization of the microwave modulation index in order to suppress the light shift of the coherent population trapping resonances / V.I. Yudin [et al.] // J. Phys. Conf. Ser. – 2021. – V.2067. – 012003 (6 pages).

85. Раднатаров, Д.А. Активное подавление светового сдвига в атомных часах на основе эффекта когерентного пленения населенностей в парах ^{87}Rb с использованием метода фазовых прыжков / Д.А. Раднатаров // Письма в ЖЭТФ. – 2023. – Т.117, №7. – С.504-508.

86. Ramsey, N.F. A molecular beam resonance method with separated oscillating fields / N.F. Ramsey // Phys. Rev. – 1950. – V.78. – P.695-699.

87. Yudin, V.I. Hyper-Ramsey spectroscopy of optical clock transitions / V.I. Yudin [et al.] // Phys. Rev. A. – 2010. – V.82. – 011804(R) (4 pages).

88. Huntemann, N. Generalized Ramsey excitation scheme with suppressed light shift / N. Huntemann [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2012. – V.109. – 213002 (5 pages).

89. Huntemann, N. Single-ion atomic clock with systematic uncertainty / N. Huntemann [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2016. – V.116. – 063001 (5 pages).

90. Hobson, R Modified hyper-Ramsey methods for the elimination of probe shifts in optical clocks / R. Hobson [et al.] // Phys. Rev. A. – 2016. – V.93. – 010501(R) (5 pages).

91. Zanon-Willette, T. Generalized hyper-Ramsey resonance with separated oscillating fields / T. Zanon-Willette, V.I. Yudin, A.V. Taichenachev // Phys. Rev. A. – 2015. – V.92. – 023416 (9 pages).

92. Zanon-Willette, T. Probe light-shift elimination in generalized hyper-Ramsey quantum clocks / T. Zanon-Willette, E. de Clercq, E. Arimondo // Phys. Rev. A. – 2016. – V.93. – 042506 (6 pages).

93. Yudin, V.I. Synthetic frequency protocol for Ramsey spectroscopy of clock transitions / V.I. Yudin [et al.] // Phys. Rev. A. – 2016. – V.94. – 052505 (9 pages).

94. Zanon-Willette T. Composite laser-pulses spectroscopy for high-accuracy optical clocks: a review of recent progress and perspectives / T. Zanon-Willette [et al.] // Rep. Prog. Phys. – 2018. – V.81. – 094401 (32 pages).

95. Sanner, Ch. Autobalanced Ramsey Spectroscopy / Ch. Sanner [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2018. – V.120. – 053602 (6 pages).

96. Yudin, V.I. Generalized Autobalanced Ramsey Spectroscopy of Clock Transitions / V.I. Yudin [et al.] // Phys. Rev. Appl. – 2018. – V.9. – 054034 (11 pages).

97. Yudin, V.I. Combined error signal in Ramsey spectroscopy of clock transitions / V.I. Yudin [et al.] // New J. Phys. – 2018. – V.20. – 123016 (13 pages).

98. Abdel Hafiz, M. Toward a High-Stability Coherent Population Trapping Cs Vapor-Cell Atomic Clock Using Autobalanced Ramsey Spectroscopy / M. Abdel Hafiz [et al.] // Phys. Rev. Appl. – 2018. – V.9. – 064002 (10 pages).

99. Shuker, M. Ramsey Spectroscopy with Displaced Frequency Jumps / M. Shuker [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2019. – V.122. – 113601 (6 pages).

100. Shuker, M. Reduction of light shifts in Ramsey spectroscopy with a combined error signal / M. Shuker [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2019. – V.114. – 141106 (6 pages).

101. Lezama, A. Electromagnetically induced absorption / A. Lezama, S. Barreiro, A.M. Akulshin // Phys. Rev. A. – 1999. – V.59. – P.4732-4735.

102. Dancheva, Y. Coherent effects on the Zeeman sublevels of hyperfine states in optical pumping of Rb by monomode diode laser / Y. Dancheva [et al.] // Opt. Commun. – 2000. – V.178. – P.103-110.

103. Renzoni, F. Enhanced absorption Hanle effect on the $F_g = F \rightarrow F_e = F + 1$ closed transitions / F. Renzoni [et al.] // J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. – 2001. – V.3. – S7 (9 pages).

104. Бражников, Д.В. О некоторых особенностях магнитооптических резонансов в бегущей эллиптически поляризованной световой волне / Д.В. Бражников [и др.] // Письма в ЖЭТФ. – 2006. – V.83. – С.71-75.

105. Goren, C. Electromagnetically induced absorption due to transfer of coherence and to transfer of population / C. Goren [et al.] // Phys. Rev. A. – 2003. – V.67. – 033807 (8 pages).

106. Zigdon, T. Absorption spectra for strong pump and probe in atomic beam of cesium atoms / T. Zigdon, A. D. Wilson-Gordon, H. Friedmann // Phys. Rev. A. – 2009. – V.80. – 033825 (8 pages).

107. Лазебный, Д.Б. Эффекты электромагнитно-индуцированной абсорбции и электромагнитно-индуцированной прозрачности для оптических переходов $F_g \to F_e$ в поле эллиптически поляризованных волн / Д.Б. Лазебный [и др.] // ЖЭТФ. – 2015. – Т.148. – С.1068-1085.

108. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 439 с.

109. Yudin, V.I. Dynamic steady state of periodically driven quantum systems / V.I. Yudin, A.V. Taichenachev, M.Yu. Basalaev // Phys. Rev. A. – 2016. – V.93. – 013820 (9 pages).

110. Drever, R.W.P. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator / R.W.P. Drever [et al.] // Appl. Phys. B. – 1983. – V.31. – P.97-105.

111. Torii, Y. Laser-phase and frequency stabilization using atomic coherence / Y. Torii [et al.] // Phys. Rev. A. – 2012. – V.86. – 033805 (7 pages).

112. Guérandel, S. Raman-Ramsey interaction for coherent population trapping Cs clock / S. Guérandel [et al.] // IEEE Trans. Instrum. Meas. – 2007. – V.56. – P.383-387.

113. Yun, P. Multipulse Ramsey-CPT interference fringes for the ^{87}Rb clock transition / P. Yun [et al.] // Europhys. Lett. – 2012. – V.97. – 63004 (5 pages).

114. Warren, Z. Pulsed coherent population trapping with repeated queries for producing single-peaked high contrast Ramsey interference / Z. Warren [et al.] // J. Appl. Phys. – 2018. – V.123. – 053101 (9 pages).

115. Chuchelov, D.S. Central Ramsey fringe identification by means of an auxiliary optical field / D.S. Chuchelov [et al.] // J. Appl. Phys. – 2019. – V.126. – 054503 (6 pages).

116. Yudin, V.I. Dynamic regime of coherent population trapping and optimization of frequency modulation parameters in atomic clocks / V.I. Yudin [et al.] // Opt. Express. – 2017. – V.25. – P.2742-2751.

117. Юдин, В.И. Оптимизация режимов стабилизации атомных часов на основе эффекта когерентного пленения населенностей / В.И. Юдин [и др.] // Известия РАН. Серия физическая. – 2017. – Т.81, №12. – С.1642-1646.

118. Коваленко, Д.В. Резонансы электромагнитно-индуцированных прозрачности и абсорбции в световом поле эллиптически поляризованных волн / Д.В. Коваленко [и др.] // Квантовая Электроника. – 2020. – Т.50, №6. – С.571-575.

119. Basalaev, M.Yu. Generalized Ramsey methods in the spectroscopy of coherent-population-trapping resonances / M.Yu. Basalaev [et al.] // Physical Review A. – 2020. – V.102. – 013511 (12 pages).

120. Коваленко, Д.В. Обобщенные рамсеевские методы подавления полевых сдвигов в атомных часах на основе эффекта когерентного пленения населенностей / Д.В. Коваленко [и др.] // Квантовая электроника. – 2021. – Т.51, №6. – С.495-501.

121. Юдин, В. И. Форма линии резонанса когерентного пленения населенностей в случае гауссова пространственного профиля светового пучка / В. И. Юдин [и др.] // Квантовая электроника. – 2022. – Т.52, №2. – С.105-107.

122. Pollock, J.W. Inhomogeneous light shifts of coherent population trapping resonances / J.W. Pollock [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2022. – V.120. – 154001 (6 pages).

123. Коваленко, Д.В. Полевой сдвиг резонанса когерентного пленения населенностей с учетом пространственной неоднородности светового пучка / Д.В. Коваленко [и др.] // ЖЭТФ – 2023. – Т.164, №2(8). – С.255-261.

124. Коваленко, Д.В. Динамический режим формирования резонансов когерентного пленения населенностей и оптимизация режимов стабилизации частоты в атомных часах / Д.В. Коваленко // материалы 55-й международной

научной студенческой конференции (МНСК), секция «Фотоника и квантовые оптические технологии». – Новосибирск. 17-20 апреля 2017. – 19 с.

125. Коваленко, Д.В. Оптимизация режимов стабилизации частоты в атомных часах, основанных на эффекте когерентного пленения населённостей / Д.В. Коваленко [и др.] // Материалы молодежной конкурс-конференции «Оптические и информационные технологии 2017». – Новосибирск. 25-27 сентября 2017. – 47 с.

126. Басалаев, М.Ю. Исследование динамического режима стабилизации атомных часов на основе эффекта когерентного пленения населенностей / М.Ю. Басалаев [и др.] // Сборник трудов X Международной конференции молодых ученых и специалистов «Оптика-2017». Санкт-Петербург. 16-20 октября 2017 / Под ред. проф. В.Г. Беспалова, проф. С.А. Козлова. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 606 с.

127. Yudin, V.I. Optimization of frequency modulation parameters in atomic clocks based on coherent population trapping / V.I. Yudin [et al.] // Proceedings of 2017 Joint Conference of the European Frequency and Time Forum and IEEE International Frequency Control Symposium, Besancon, France, 2017. – P.307-309.

128. Коваленко, Д.В. Резонансы электромагнитно-индуцированных прозрачности и абсорбции в двухчастотном эллиптически поляризованном световом поле / Д.В. Коваленко [и др.] // Материалы 9-го Международного семинара по волоконным лазерам 2020 / ИАиЭ СО РАН, 20-24 сентября 2020 года. – Новосибирск, Изд-во: Институт автоматики и электрометрии СО РАН, 2020. – С.224-225.

129. Коваленко, Д.В. Резонансы ЭИП/ЭИА в световом поле эллиптически поляризованных волн / Д.В. Коваленко [и др.] // Сборник трудов XII Международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики – 2020» / Санкт-Петербург, 19-23 октября 2020 года. / Под ред. Проф. С.А. Козлова. – Санкт-Петербург, Изд-во: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО», 2020. – С.48-49.

130. Коваленко, Д.В. Обобщенные рамсеевские методы в спектроскопии резонансов когерентного пленения населенностей / Д.В. Коваленко // Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2021: секция «Физика» / Академгородок, 12-23 апреля 2021 года. – Новосибирск, Изд-во: Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2021. – 32 с.

131. Kovalenko, D.V. EIT/EIA Resonances Driven by the Light Field of Elliptically Polarized Waves / D.V. Kovalenko [et al.] // 2021 Joint Conference of the European Frequency and Time Forum and IEEE International Frequency Control Symposium (EFTF/IFCS), 2021. – P.1-5.

132. Yudin, V.I. Spatially inhomogeneous light shift of the coherent population trapping resonances / V.I. Yudin [et al.] // Modern problems of laser physics - MPLP-2021 / Novosibirsk, 22-28 August 2021. – Ofset-TM, Novosibirsk, 2021. – P.78-79.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Выражение для лиувиллиана, определяемого уравнениями (5.3)–(5.5):

$$\hat{L}=\begin{pmatrix} -\Gamma/2 & 0 & 0 & \Gamma/2 & -i\Omega_1 & i\Omega_1^* & 0 & 0 & \gamma_1+\Gamma/2 \\ 0 & -\Gamma-i(\delta_R-\Delta_{\text{sh}}) & 0 & 0 & -i\Omega_2 & 0 & 0 & i\Omega_1^* & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma+i(\delta_R-\Delta_{\text{sh}}) & 0 & 0 & i\Omega_2^* & -i\Omega_1 & 0 & 0 \\ \Gamma/2 & 0 & 0 & -\Gamma/2 & 0 & 0 & -i\Omega_2 & i\Omega_2^* & \gamma_2+\Gamma/2 \\ -i\Omega_1^* & -i\Omega_2^* & 0 & 0 & -\gamma_{\text{opt}}-i\delta_1 & 0 & 0 & 0 & i\Omega_1^* \\ i\Omega_1 & 0 & i\Omega_2 & 0 & 0 & -\gamma_{\text{opt}}+i\delta_1 & 0 & 0 & -i\Omega_1 \\ 0 & 0 & -i\Omega_1^* & -i\Omega_2^* & 0 & 0 & -\gamma_{\text{opt}}-i\delta_2 & 0 & i\Omega_2^* \\ 0 & i\Omega_1 & 0 & i\Omega_2 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\text{opt}}+i\delta_2 & -i\Omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\Omega_1 & -i\Omega_1^* & i\Omega_2 & -i\Omega_2^* & -\gamma_{\text{sp}}-\Gamma \end{pmatrix}.$$

(A1)

В отсутствие светового поля ($\Omega_1=\Omega_2=0$ и $\Delta_{\text{sh}}=0$), лиувиллиан $\hat{L}$ принимает следующую форму:

$$\hat{L}_0=\begin{pmatrix} -\Gamma/2 & 0 & 0 & \Gamma/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1+\Gamma/2 \\ 0 & -\Gamma-i\delta_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma+i\delta_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma/2 & 0 & 0 & -\Gamma/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2+\Gamma/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\text{opt}}-i\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\text{opt}}+i\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\text{opt}}-i\delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\text{opt}}+i\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\text{sp}}-\Gamma \end{pmatrix}.$$

(A2)

Оператор $\hat{G}_T=e^{\hat{L}_0 T}$ описывает свободную эволюцию атомов:

$$\hat{G}_{\text{T}}=\begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{19} \\ 0 & e^{-(\Gamma+i\delta_{\text{R}})T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\Gamma-i\delta_{\text{R}})T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & 0 & 0 & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{\text{opt}}+i\delta_1)T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{\text{opt}}-i\delta_1)T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{\text{opt}}+i\delta_2)T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{\text{opt}}-i\delta_2)T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{\text{sp}}+\Gamma)T} \end{pmatrix}, \quad \text{(A3)}$$

где

$$G_{11} = G_{44} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\Gamma T}) \tag{A4}$$

$$G_{14} = G_{41} = \frac{1}{2}(1 - e^{-\Gamma T}) \tag{A5}$$

$$G_{19} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \Gamma)}{2(\gamma_{sp} + \Gamma)} + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\gamma_{sp}} e^{-\Gamma T} - \frac{\gamma_{sp}(2\gamma_1 + \Gamma) + \Gamma(\gamma_1 - \gamma_2)}{2\gamma_{sp}(\gamma_{sp} + \Gamma)} e^{-(\gamma_{sp} + \Gamma)T}, \tag{A6}$$

$$G_{49} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \Gamma)}{2(\gamma_{sp} + \Gamma)} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\gamma_{sp}} e^{-\Gamma T} - \frac{\gamma_{sp}(2\gamma_2 + \Gamma) - \Gamma(\gamma_1 - \gamma_2)}{2\gamma_{sp}(\gamma_{sp} + \Gamma)} e^{-(\gamma_{sp} + \Gamma)T}. \tag{A7}$$