На правах рукописи

**Михайлов Антон Михайлович**

# Теория субдоплеровских резонансов в парах щелочных металлов в поле встречных поляризованных бихроматических лазерных пучков

Специальность 1.3.19 —
«Лазерная физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: **Бражников Денис Викторович**,
кандидат физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук»,
ведущий научный сотрудник

Официальные оппоненты: **Соколов Игорь Михайлович,**
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук»,
ведущий научный сотрудник, профессор

**Савинов Константин Николаевич,**
кандидат физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»,
доцент кафедры лазерных систем

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт физики полупроводников им. А.В. Ржанова Сибирского отделения Российской академии наук»

Защита состоится 11 декабря 2026 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 24.1.070.02 при Институте лазерной физики СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр-кт Академика Лаврентьева, 15 Б.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института лазерной физики СО РАН https://laser.nsc.ru

Автореферат разослан «___» _____ 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.1.070.02,
канд. физ.-мат. наук Березуцкий А. Г.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Методы нелинейной лазерной спектроскопии позволяют на порядки повысить разрешение спектральных линий [1; 2] и проводить высокоточные исследования в газах низкого давления. В настоящее время эти методы широко используются во множестве приложений: от оптических стандартов частоты [1; 3; 4], атомных часов и различных высокочувствительных квантовых сенсоров [5—7] до экологического контроля [8].

Одним из важнейших нелинейных эффектов в лазерной спектроскопии газов является эффект насыщения поглощения доплеровски уширенной спектральной линии. Наиболее простая и часто встречаемая на практике реализации метода насыщенного поглощения основана на использовании двух монохроматических лазерных пучков, обладающих одинаковой частотой и распространяющихся во встречных направлениях. При приближении частоты излучения лазера $\omega$ к собственной частоте $\omega_0$ какого-либо атомного или молекулярного перехода в профиле поглощения пробного пучка наблюдается нелинейный резонанс, свободный от доплеровского уширения – резонанс насыщенного поглощения (РНП) [9; 10]. С момента своего возникновения методы нелинейной спектроскопии, основанные на явлении насыщенного поглощения, получили широкое распространение. Они используются для стабилизации частоты лазерного излучения во многих современных экспериментальных исследованиях или в качестве частотного репера в оптических стандартах частоты [1; 3; 11; 12].

Квантовые стандарты частоты (КСЧ) — это устройства, служащие эталоном единицы частоты (герца) и использующие в своей основе принципы квантовой физики. Общепринятой мерой стабильности КСЧ является девиация Аллана – $\sigma_y$ [3]. Она описывает зависимость остаточной нестабильности частоты сигнала от времени усреднения $\tau$. Разные стандарты, обладающие сравнимой стабильностью $\sigma_y$ при малых значениях времени усреднения $\tau$, могут значительно расходиться при увеличении времени усреднения. Таким образом, стабильность КСЧ принято характеризовать значением $\sigma_y$ за разные промежутки времени усреднения: от долей секунды и до 24-х часов ($\sim 10^5$ с).

Современные стандарты частоты в зависимости от их массы, занимаемого объёма и энергопотребления можно условно разделить на следующие категории: лабораторные (стационарные), транспортируемые (объём $\sim 1000$ л), компактные (объём $\sim 1$ л) и миниатюрные (объём $\lesssim 0.1$ л). Помимо этого, КСЧ принято разделять на оптические и микроволновые в зависимости от резонансной частоты используемого атомного (реперного) перехода и, следовательно, стабилизируемой частоты электромагнитного излучения. Так как частоты оптического диапазона существенно больше микроволновых частот, КСЧ на их основе могут потенциально достигать лучших значений стабильности частоты [12].

В категорию миниатюрных стандартов относят наиболее компактные и энергоэффективные (P $\lesssim 1$ Вт) образцы КСЧ. Область применения стандартов

этого класса варьируется от мобильной пользовательской аппаратуры на Земле, до компактных спутников в космосе [13]. С момента своего возникновения миниатюрные КСЧ были представлены только стандартами микроволнового диапазона. Например, КСЧ основанные на эффекте двойного радиооптического резонанса (ДРОР) [14]. Миниатюрные КСЧ также могут быть основаны на эффекте когерентного пленения населённостей (КПН) [15; 16]. Стандарты основанные на эффекте ДРОР обладают повышенным энергопотреблением (5-10 Вт) и габаритами по сравнению с КСЧ на основе КПН. Значения стабильности этих устройств находятся на уровне $\sigma_y \sim 10^{-12}$ за 1 с и $\sigma_y \sim 10^{-12}$ за 24 часа [17; 18].

Начиная с 2017 года, стали появляться первые удачные работы в направлении разработки миниатюрных КСЧ оптического диапазона. Одним из возможных подходов является использование одночастотного РНП, как, например, продемонстрировано в работе [19]. Другим подходом является двухфотонная спектроскопия атомов рубидия, продемонстрированная, например, в работе [20]. Помимо различных методов стабилизации частоты, в работе [21] был предложен хорошо поддающийся миниатюризации метод переноса стабильности оптической частоты в радиодиапазон при помощи кристаллических микрорезонаторов с модами шепчущей галереи.

Помимо двух указанных методов нелинейной спектроскопии, существует третий подход к разработке миниатюрных стандартов оптического диапазона, основанный на методе субдоплеровской спектроскопии атомов щелочных металлов в поле встречных бихроматических лазерных пучков [22; 23]. Методы основанные на РНП и двухфотонной спектроскопии обладают хорошо проработанной теорией.

Применительно к настоящей работе особый интерес представляют спектроскопические модели, описывающие одночастотный метод возбуждения РНП в таких условиях, в которых возникает однородно уширенный пик в поглощении среды резонансных атомов вместо привычного провала (см., например, [24—27]). Некоторые физические процессы, лежащие в основе эффекта пика в поглощении, также проявляются и в исследуемом в настоящей работе методе двухчастотной субдоплеровской спектроскопии. Однако в отличие от одночастотного режима взаимодействия атомов с полем, в нашем случае происходит совокупность различных нелинейных оптических эффектов, каждый из которых может как усилить эффект пика в поглощении среды, так и ослабить его.

Поскольку высококонтрастные субдоплеровские двухчастотные резонансы (СДР) в виде пика в поглощении среды были открыты экспериментально относительно недавно [22], то до настоящей работы не были проведены теоретические исследования этого эффекта с акцентом на получение явных аналитических результатов. Такие результаты, с одной стороны, всегда представляют интерес для развития теории какого-либо наблюдаемого эффекта, а с другой — могут предсказать новые особенности СДР, имеющие важность с точки зрения их практического использования. Особенно это касается рассмотрения реальной структуры уровней энергии в атоме (с учётом вырождения по проекции полного

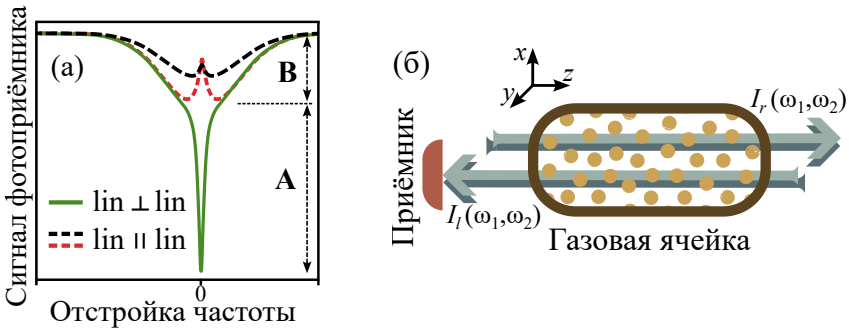


Рис. 1 — На рисунке (а) чёрной пунктирной линией обозначен РНП, красной пунктирной и зелёной линиями – субдоплеровский двухчастотный резонанс для случаев параллельных (lin ∥ lin) и ортогональных (lin ⊥ lin) линейных поляризаций, буквами **A** и **B** обозначены амплитуды узкой и широкой частей резонансного контура соответственно. На рисунке (б) представлено схематическое изображение рассматриваемой задачи, где $I_r$, $I_l$ – встречные бихроматические лазерные пучки, распространяющиеся вдоль и против направления оси $z$ соответственно

углового момента) с полным учётом векторной природы света и различных процессов релаксации. Настоящая диссертационная работа посвящена устранению некоторых имеющихся пробелов в теории СДР.

На рисунке 1а продемонстрирована способность СДР превосходить обычный РНП более чем на порядок по величине отношения контраста к ширине. Значение именно этого параметра в значительной мере определяет кратковременную стабильность КСЧ. СДР представляет собой оптический нелинейный резонанс, возникающий в парах атомов щелочных металлов под действием встречных поляризованных двухчастотных лазерных пучков (рисунок 1б), когда разность частот спектральных составляющих лазерного излучения совпадает с частотой сверхтонкого расщепления в основном состоянии атома.

Физические причины наблюдения высококачественных нелинейных СДР были исследованы в работах [28; 29], где было дано объяснение возникающего эффекта и построена спектроскопическая модель атома. Несмотря на успешное описание рассматриваемых резонансов в этих работах, их результаты получены методами только численного решения уравнений на матрицу плотности. Однако для полноты физической картины, т.е. для понимания всех причин образования нелинейных резонансов и их особенностей при изменении различных параметров эксперимента (поляризации света, интенсивности излучения и других), большое значение играет нахождение аналитических решений поставленной задачи.

**Целью** данной работы является построение аналитической теории взаимодействия встречных бихроматических лазерных пучков с газом атомов щелочных металлов — цезия или рубидия. Эта теория должна не только объяснить основные закономерности наблюдаемых в экспериментах субдоплеровских резонансов, но и в явном виде выделить вклады различных оптических линейных и нелинейных эффектов. Для достижения данной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Получить аналитические выражения для поглощения света в газовой ячейке в рамках упрощённой трёхуровневой спектроскопической модели атома ($\Lambda$-схема) в двух режимах, наиболее часто встречающихся на практике: а) Пробной волны – описывающем поглощение низкоинтенсивного пучка в присутствии более интенсивного встречного пучка накачки, б) Стоячей волны – описывающем суммарное поглощение встречных пучков с близкими значениями интенсивности.
2. Развить модель из п. 1 для учёта реальной структуры энергетических уровней в $D_1$ линии атома щелочного металла (Rb или Cs) с полным учётом векторной природы света, обладающего, в общем случае, эллиптической поляризацией, а также с учётом различных релаксационных и нелинейных процессов в атоме.
3. Получить численные решения уравнений вне рамок теории возмущений и сравнить с предсказаниями аналитической теории.
4. Определить оптимальные параметры возбуждения субдоплеровских резонансов для приложений к миниатюрным оптическим стандартам частоты (поляризационную конфигурацию пучков, возбуждаемые оптические переходы в $D_1$-линии, оптическую мощность и другие).

**Научная новизна:**

– На основе трёхуровневой спектроскопической модели атома ($\Lambda$-схемы) впервые получены аналитические выражения, описывающие поглощение светового бихроматического поля встречных линейно поляризованных пучков в двух ключевых режимах взаимодействия: режиме стоячей волны и режиме пробной волны. Полученные выражения выявляют основные механизмы, ответственные за формирование высококонтрастных субдоплеровских резонансов, наблюдающихся на практике в парах щелочных металлов (Rb и Cs).
– На основе многоуровневой спектроскопической модели атома с полным учётом поляризаций световых пучков и вырождения уровней энергии по проекции полного углового момента впервые получены аналитические выражения, описывающие поглощение светового бихроматического поля. Полученные выражения позволяют учесть одновременное действие различных нелинейных оптических эффектов, конкурирующих друг с другом за формирование субдоплеровского резонанса. Каждый из этих эффектов был рассмотрен по отдельности, что позволило судить о его парциальном вкладе в наблюдаемый резонансный контур.

– Для реальных атомных переходов впервые получены аналитические выражения, ответственные за появление эффекта асимметрии и сдвига субдоплеровского резонанса. На основании полученных выражений выработаны рекомендации по устранению этого эффекта, нежелательного при создании оптических стандартов частоты.
– Теоретически предсказано увеличение (на 10 – 20 %) отношения контраст/ширина субдоплеровских резонансов при использовании циркулярных поляризаций встречных световых пучков по сравнению со случаем линейных поляризаций, которые используются в подавляющем большинстве работ, посвящённых методу двухчастотной субдоплеровской спектроскопии.
– С помощью численных расчётов вне рамок теории возмущений показано, что атомы рубидия предпочтительнее атомов цезия с точки зрения максимизации отношения контраст/ширина для наблюдаемых резонансов. В то время как большинство экспериментальных работ, нацеленных на создание оптического КСЧ с использованием рассматриваемого метода спектроскопии, выполнялись с атомами цезия.

**Теоретическая и практическая значимость.** Теоретическая значимость диссертационной работы заключается, прежде всего, в развитии теории субдоплеровской спектроскопии атомарных газов на случай бихроматического лазерного поля встречных поляризованных волн. При этом, в силу поставленных условий задачи, одновременно проявляются различные нелинейные эффекты, которые ранее изучались в основном по отдельности: насыщение атомного перехода, спонтанный перенос анизотропии, оптическая накачка, различные «типы» когерентного пленения населённостей. Построенная теоретическая модель позволила, с одной стороны, учесть все эти явления, а с другой – получить аналитические выражения для каждого из них, чтобы оценить их парциальный вклад в общий спектроскопический сигнал. Этот результат позволил лучше понять физические причины высококонтрастных субдоплеровских резонансов, ранее наблюдавшихся экспериментально в поле встречных бихроматических лазерных пучков в парах рубидия и цезия.

Практическая значимость проделанной работы связана с возможным приложением её результатов к решению актуальных задач квантовой метрологии, а именно, к созданию стабилизированных по частоте компактных лазерных источников. Такие источники востребованы, в свою очередь, во многих квантовых сенсорах, например, в транспортируемых атомно-оптических гравиметрах и гироскопах. Также в настоящее время развивается новое направление в квантовой метрологии – миниатюрные оптические стандарты частоты (МОСЧ). Так, уже имеется ряд экспериментальных работ, в которых предлагается рассматриваемый в настоящей работе метод лазерной спектроскопии для создания МОСЧ. В этом направлении значимость проделанной работы заключается в том, что в ней приводится теоретическое обоснование оптимальной поляризационной

конфигурации световых пучков для достижения наилучшего контраста нелинейных резонансов, а также даются рекомендации по выбору конкретной схемы возбуждения резонансов, которая должна обеспечить более высокую долговременную стабильность оптической частоты будущего МОСЧ. Такие оптические КСЧ могут в будущем прийти на смену современным миниатюрным КСЧ микроволнового диапазона, существенно повысив стабильность частоты и, таким образом, привести к прогрессу во многих связанных направлениях науки и техники.

**Методология и методы исследования.** Для описания квантового состояния атома в настоящей работе используется метод матрицы плотности. Рассматриваемые системы оптических уравнений Блоха получены с использованием квазиклассического подхода, когда внутренние степени свободы атома описываются методами квантовой механики, в то время как электромагнитное поле и внешние степени свободы описываются методами классической физики. При решении уравнения на атомную матрицу плотности, пренебрегается поглощением светового поля на длине ячейки, что соответствует режиму оптически тонкой среды (для накачивающего пучка). Также пренебрегается эффектами отдачи атома при поглощении и испускании фотонов света ввиду условий взаимодействия (в частности, из-за малости частоты отдачи по отношению к однородной ширине нелинейного резонанса и малости параметра насыщения). При рассмотрении модели многоуровневого атома, решение системы оптических уравнений Блоха выполнено с использованием аппарата теории углового момента, который основан на формализме неприводимых тензорных операторов. Аналитические решения полученных уравнений найдены при помощи метода теории возмущений. При решении уравнения на атомную матрицу плотности поглощением светового поля на длине ячейки пренебрегается, что соответствует режиму оптически тонкой среды (для накачивающего пучка). Кроме того, эффектами отдачи атома при поглощении и испускании фотонов света пренебрегается ввиду условий взаимодействия (в частности, из-за малости частоты отдачи по отношению к однородной ширине нелинейного резонанса и малости параметра насыщения). Для режимов взаимодействия атомов с полем, выходящих за рамки теории возмущений, оптические уравнения Блоха решены численно.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Нелинейные резонансы в парах атомов щелочных металлов в виде однородно уширенного пика в поглощении среды, которые возникают в поле встречных двухчастотных лазерных пучков, взаимодействующих по типу $\Lambda$-схемы с двумя оптическими переходами в атоме щелочного металла, проявляются в решении уравнения на матрицу плотности во втором порядке теории возмущений по пролётному параметру насыщения и связаны с разрушением состояния когерентного пленения населённостей в центре резонансной кривой.

2. Асимметрия и сдвиг субдоплеровских резонансов, связанные с явлением когерентного пленения населённостей, проявляются при наблюдении за поглощением только одного из двух встречных световых пучков и исчезают при наблюдении за полным поглощением света в среде (обоих световых пучков).
3. Параметр качества нелинейного резонанса, определяемый как отношение контраста резонанса к его ширине, оказывается больше при использовании встречных пучков с противоположными круговыми поляризациями, чем при использовании пучков с ортогональными линейными поляризациями.
4. Атомы $^{87}$Rb предпочтительнее атомов $^{133}$Cs с точки зрения максимизации параметра качества нелинейного резонанса. Этот параметр больше при возбуждении атомов на уровень сверхтонкого расщепления $D_1$ линии с наибольшим значением полного углового момента: $F_3 = 2$ для $^{87}$Rb и $F_3 = 4$ для $^{133}$Cs.

В пользу **достоверности** полученных результатов можно привести следующие аргументы. Все результаты получены при использовании физических моделей, которые построены с использованием современного математического аппарата квантовой механики (в частности, формализм матрицы плотности, неприводимые тензорные операторы, теория возмущений). Этот аппарат прошёл проверку временем и хорошо показал себя при решении множества других задач из области лазерной спектроскопии. Кроме того, аналитические результаты построенной теории нелинейных резонансов в поле встречных бихроматических пучков подтверждены результатами численных расчётов (в рамках установленных границ применимости аналитических результатов). Полученные результаты находятся в качественном согласии с экспериментальными данными.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих российских и международных конференциях: Физика ультрахолодных атомов - 2020 (Новосибирск), Фундаментальные проблемы оптики-2020 (Санкт-Петербург), Нелинейная фотоника-2021 (Новосибирск), Laser Physics-2021 (в формате интернет конференции), Енисейская фотоника-2022 (Красноярск), Laser Physics-2023 (Аштарак, Армения), Невская фотоника-2023 (Санкт-Петербург), МНСК-2023 (Новосибирск), Микроэлектроника-2024 (Сочи).

**Личный вклад.** Все теоретические результаты, представленные в диссертации, получены автором лично. Выбор общего направления исследований, постановка задач и их обсуждение осуществлялись совместно с научным руководителем.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 4 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 7 — в сборниках тезисов докладов.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** даётся обоснование используемого в дальнейшем математического формализма и приближений. В частности производится постановка задачи с использованием укороченного волнового уравнения и уравнения на матрицу плотности. Отметим, что для получения точной зависимости интенсивности излучения от длины ячейки, необходимо решить систему уравнений Максвела-Блоха [30—32]. Однако в этой задаче мы ограничиваемся приближениями, позволяющими получить аналитические решения.

В задаче рассматриваются два встречных бихроматических лазерных пучка, распространяющихся в положительном: $I_r = I_1(\omega_1) + I_2(\omega_2)$, и отрицательном: $I_l = I_3(\omega_1) + I_4(\omega_2)$, направлениях оси $z$ (рисунок 1б), где $I_1(\omega_1)$, $I_2(\omega_2)$, $I_3(\omega_1)$, $I_4(\omega_2)$ – интенсивности излучения на частотах $\omega_1$ и $\omega_2$. В приближении оптически тонкой среды уравнение, описывающее изменение интенсивности излучения в ячейке, имеет вид:

$$\frac{dI_j}{dz} = -\chi_j\left(z\right) I_j, \tag{1}$$

где $j = \{1,2,3,4,l,r\}$, $\chi$ – показатель поглощения.

Основная часть данной работы посвящена поиску явных аналитических выражений показателя поглощения пробного пучка в различных приближениях. Например, выбирая пучок $I_l$ в качестве пробного, в приближении медленно меняющихся амплитуд имеем следующее выражение для его показателя поглощения:

$$\chi_l = 2c\,\mathrm{Im}\left\{\frac{k_1\widetilde{\mathbf{P}}_3\left(z\right)\widetilde{\mathbf{E}}_3^*\left(z\right) + k_2\widetilde{\mathbf{P}}_4\left(z\right)\widetilde{\mathbf{E}}_4^*\left(z\right)}{I_3(z) + I_4(z)}\right\}, \tag{2}$$

где $\widetilde{\mathbf{P}}$, $\widetilde{\mathbf{E}}$ – медленно зависящие от времени амплитуды вектора поляризации среды и электрического поля, $k_1$, $k_2$ – волновые числа, соответствующие частотам $\omega_1$, $\omega_2$, $c$ – скорость света в вакууме. Вектор поляризации среды: $\mathbf{P}(z) = n_0\langle\mathrm{Tr}\{\hat{\mathbf{d}}\hat{\rho}(z)\}\rangle_v$, где $n_0$ - концентрация частиц, $\langle\ldots\rangle_v$ - усреднение по скоростному распределению Максвелла, $\hat{\mathbf{d}}$ - оператор дипольного момента, $\hat{\rho}$ - матрица плотности.

Из эксперимента [29] известно о наличии медленных осцилляций коэффициента поглощения вдоль оси пучка. Для учёта этих пространственных осцилляций, в этой главе выполняется разложение элементов матрицы плотности по пространственным гармоникам:

$$\hat{\rho}_{ab}(z,t) = e^{-i(\frac{E_a-E_b}{\hbar})t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{\rho}_{ab}^{(nm)}e^{i(nk_1+mk_2)z}, \tag{3}$$

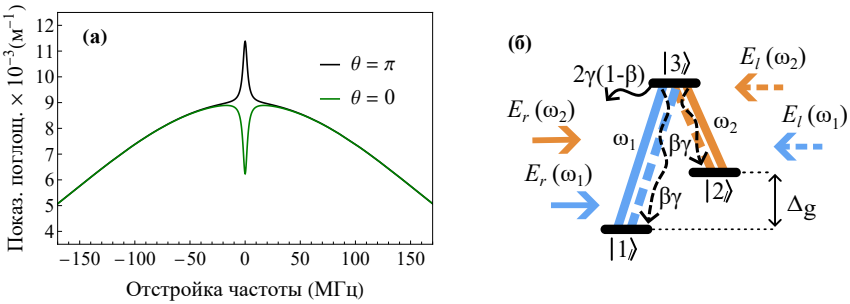


Рис. 2 — Аналитический график СДР соответствующий $D_1$ линии цезия при температуре атомов $\sim 50°C$ и диаметре лазерного пучка 0.5 мм: $I_r = 50$ мкВт/см$^2$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-2}\gamma$, полуширина доплеровского контура $kv_0 = 2\pi \cdot 230$ МГц, длинна волны лазерного излучения $\lambda = 894{,}6$ нм. (а) Показатель поглощения в модели $\Lambda$-схемы уровней энергии, (б) Рассматриваемая модель $\Lambda$-схемы уровней энергии, где $\Delta_g$-величина сверхтонкого расщепления основного состояния, $\beta$-коэфф. ветвления, $\gamma$-скорость спонтанной релаксации (для $\Lambda$-схемы)

где $t$ – время, $E_k$ – энергия $k$-ого уровня, $\hbar$ – приведённая постоянная Планка. Для описания наблюдаемых осцилляций достаточно ограничиться несколькими слагаемыми – приближение низших пространственных гармоник. Ниже, в качестве примера, представлено выражение для показателя поглощения $I_1$ - интенсивности на частоте $\omega_1$. Тогда, в соответствии с описанными приближениями имеем:

$$\chi_1 = \frac{2ck_1n_0}{I_1(z_0)} \operatorname{Im}\left(\operatorname{Tr}(\hat{\mathbf{d}}_{13}\langle\hat{\rho}_{31}^{(+)}\rangle_v + \hat{\mathbf{d}}_{13}\langle\hat{\rho}_{31}^{(+21)}\rangle_v e^{-2ik_{12}z})\widetilde{\mathbf{E}}_1^*\right), \tag{4}$$

где $k_{12} = k_1 - k_2$, $z_0$ – координата начала ячейки.

Для вычисления элементов матрицы плотности используется уравнение движения в Линдбладовской форме [1]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{\rho}(z,t) = -\frac{i}{\hbar}\left[\left(\widehat{H}_0 + \widehat{V}\right), \hat{\rho}(z,t)\right] + \widehat{\mathfrak{R}}\left\{\hat{\rho}(z,t)\right\}, \tag{5}$$

где $v_z$ – проекция скорости атома на ось квантования $z$, $\widehat{\mathfrak{R}}$ – оператор релаксации, $\widehat{H}_0$ – гамильтониан свободного атома, $\widehat{V} = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{E}$ – гамильтониан взаимодействия с лазерным полем в дипольном приближении. При записи гамильтониана взаимодействия $\widehat{V}$ используется резонансное приближение (приближение вращающейся волны).

**Вторая глава** посвящена исследованию взаимодействия бихроматического лазерного поляризованного излучения со средой трёхуровневых атомов ($\Lambda$-схема уровней энергии – рисунок 2б), для чего производится вывод и решение системы оптических уравнений Блоха. Наличие в реальных атомах уровней энергии, которые отсутствуют в рассматриваемой $\Lambda$-схеме, учитывается введением коэффициента ветвления $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Несмотря на то, что используемая модель

является скалярной, то есть не учитывает в полной мере векторную природу света, тем не менее, это можно сделать феноменологическим образом, введя эффективную фазу $\alpha$. Эта фаза соответствует углу между линейными поляризациями встречных пучков. Адекватность такого подхода оправдывается тем, что рассматриваемая модель соответствует реальному переходу $F_g = 1 \to F_e = 0$, где $F_g$, $F_e$ - полные угловые моменты основного и возбуждённого состояния, соответственно. В этом случае действие угла между линейными поляризациями пучков сводится к введению в оператор взаимодействия соответствующих фазовых множителей вида $e^{\pm i\alpha}$. В задаче таким образом возникает общая фаза $\tilde{\theta} = \phi_1 - \phi_2 - 2\alpha + 2k_{12}z$, где $\phi_1$, $\phi_2$ – постоянные разности фаз встречного пучка с прямым пучком, соответствующие частотам $\omega_1, \omega_2$. Таким образом, в рассматриваемом приближении фаза $\tilde{\theta}$ описывает пространственные осцилляции (период $\sim$1.6 см для атомов $^{133}$Cs [28]) и угол между линейными поляризациями встречных пучков и определяет величину и знак нелинейного резонанса (рисунок 2а).

В результате во второй главе были получены аналитические выражения, описывающие рассматриваемую задачу в двух режимах: пробной волны ($I_r \gg I_l$) и стоячей волны ($I_r \approx I_l$). Задача была решена по теории возмущений для каждого из режимов, и были получены аналитические выражения, соответствующие различным физическим эффектам, ответственным за формирование исследуемых резонансов. В режиме стоячей волны продемонстрировано отсутствие асимметрии субдоплеровского резонанса, а также получены и проанализированы слагаемые, отсутствующие в режиме пробной волны (например, эффект самонасыщения). В режиме пробной волны, в частности, выделен и исследован вклад в показатель поглощения, связанный с КПН эффектом и ответственный за появление асимметрии и сдвига субдоплеровского резонанса:

$$\chi_{CPT} \approx -\frac{3\sqrt{\pi}\gamma_{eg}\tau\beta^2\gamma^3}{8k_1 v_0(\delta^2+\gamma_{eg}^2)}\left(\cos\tilde{\theta} - \frac{\delta}{\gamma_{eg}}\sin\tilde{\theta}\right)\frac{I_r}{I_{sat}}, \tag{6}$$

где $\delta$ – отстройка частоты, $\gamma_{eg} = \gamma + \Gamma$ – скорость релаксации оптических когерентностей, $\gamma$ – скорость спонтанной релаксации, $\tau = \Gamma^{-1}$ – среднее время пролёта атома через пучок, $v_0$ – наиболее вероятная скорость атомов в газе, $I_{sat}$ – интенсивность насыщения.

В **третьей главе**, в отличие от предыдущей главы, рассматривается многоуровневая модель атома (рисунок 3а), учитывающая расщепление уровней энергии по проекции полного углового момента для исследуемых переходов, строго учитывается векторная природа света и рассматривается общий случай эллиптической поляризации света. Отметим, что в этой главе используется обозначение частоты спонтанной релаксации ($\gamma_0$), которое отличается от ($\gamma$) обозначения используемого в главе посвященной $\Lambda$-схеме: $\gamma_0 = 2\gamma$, $\gamma_{eg} = \gamma_0/2 + \Gamma$.

Для записи и решения возникающих оптических уравнений Блоха в этой главе используется формализм поляризационных моментов ($\varkappa q$-представление [33]). Использование $\varkappa q$-представления позволяет лучше раскрыть физическую

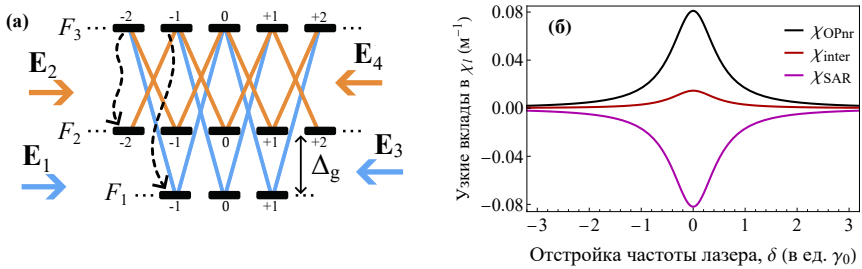


Рис. 3 — (а) Схема рассматриваемой системы уровней энергии: сплошными линиями изображены дипольные переходы $F_1 \leftrightarrow F_3$ и $F_2 \leftrightarrow F_3$, пунктиром продемонстрированы некоторые каналы спонтанных переходов, цвет соответствует частоте излучения: синий - $\omega_1$, оранжевый - $\omega_2$, (б) сравнение нелинейных вкладов в узкую часть показателя поглощения ($R = 0.02\gamma_0$, для $lin \perp lin$ поляризации)

картину наблюдаемых резонансов – придать различным вкладам в показатель поглощения среды явный физический смысл.

Рассматриваемая в третьей главе задача была решена по теории возмущений в режиме стоячей волны ($I_r \approx I_l$) и получены аналитические выражения, соответствующие различным физическим эффектам, ответственным за формирование исследуемых резонансов. Параметром малости является величина пролётного параметра насыщения $2\gamma_{eg}\tau S$, где $S = R^2/(\gamma_{eg}^2 + (\delta \pm kv)^2)$, $R$ – частота Раби. Итоговый показатель поглощения для пучка $I_l$ можно представить как сумму вкладов различных физических эффектов:

$$\chi_l \approx \chi_{lin} + \chi_{OPwd} + \chi_{OPnr} + \chi_{SAR} + \chi_{SS} + \chi_{inter}. \tag{7}$$

Здесь $\chi_l$ – линейное допплеровское уширение (графики соответствующие этой и следующей главе построены для $D_1$ линии $^{133}$Cs при температуре 22,5°C, в соответствии с условиями эксперимента [22].) Нелинейные вклады в узкую часть исследуемого резонанса (рисунок 3б): $\chi_{SAR}$ – насыщенное поглощение, $\chi_{OPnr}$ – оптическая накачка, $\chi_{inter}$ – интерференция, связанная с эффектом КПН между зеемановскими подуровнями. Нелинейные вклады в широкий доплеровский контур (рисунок 4а): $\chi_{OPwd}$ – оптическая накачка, $\chi_{SS}$ – самонасыщение.

Ниже представлены выражения для некоторых вкладов в показатель поглощения. Линейный вклад в показатель поглощения ожидаемо не зависит от напряженности поля (нет частоты Раби – $R$) и описывает широкий доплеровский контур:

$$\chi_{lin} = a_0\Gamma\frac{\langle\eta_3\rangle_v + \langle\eta_4\rangle_v}{(2J+1)\sqrt{3}(2I_n+1)} \approx \frac{2a_0\sqrt{\pi}(R_3^2+R_4^2)}{kv_0\sqrt{3}(2J+1)(2I_n+1)}e^{-\frac{\delta^2}{(kv_0)^2}}, \tag{8}$$

здесь $I_n$ - угловой момент атомного ядра, $J$ - полный орбитальный момент электронов, $a_0 = 2cn_0\hbar k/I_l\sqrt{3}$. Важным результатом данной главы является вывод

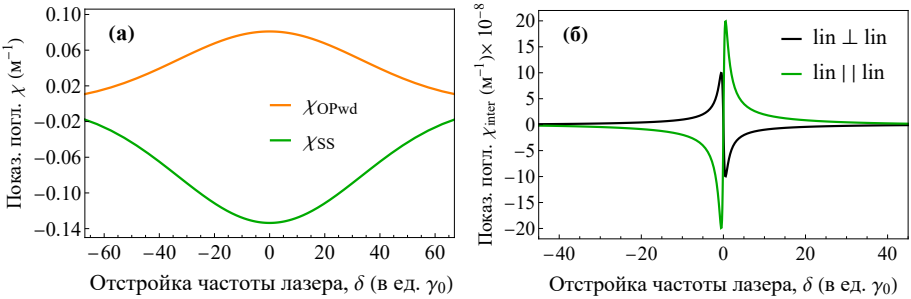


Рис. 4 — Сравнение различных нелинейных вкладов ($R = 0.02\gamma_0$): (а) нелинейные вклады в широкую часть показателя поглощения для линейных поляризаций (не зависят от угла между поляризациями), (б) асимметрия интерференционного вклада в показатель поглощения

аналитического выражения, описывающего асимметрию формы линии нелинейного резонанса. Эта асимметрия связана с КПН эффектом между уровнями сверхтонкого расщепления основного состояния (рисунок 4б):

$$\chi_{inter} = \frac{a_0 R_1 R_2 R_3 R_4}{(2J+1)(2I_n+1)} \sum_{\varkappa=1}^{2} \{\{\boldsymbol{\xi}_1 \otimes \boldsymbol{\xi}_1^*\}_\varkappa \otimes \boldsymbol{\xi}_2\}_1 \boldsymbol{\xi}_2^* \times$$
$$\times \frac{2\sqrt{\pi}\left(\gamma_{eg}\cos\theta_m - \delta\frac{k_{12}}{k_1}\sin\theta_m\right)}{\Gamma k v_0\left(\delta^2+\gamma_{eg}^2\right)} (-1)^{F_3+\varkappa} \Pi_\varkappa \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \varkappa \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{Bmatrix}^2. \tag{9}$$

Здесь $\theta_m = 2k_{12}z + \phi_1 - \phi_2$ – фаза зависящая от координаты $z$, выражения в фигурных скобках $\{\dots\}$ – 6j символы [34], $\Pi_\varkappa = \sqrt{(2\varkappa+1)}$, $\boldsymbol{\xi}_i$ – комплексные векторы поляризации встречных пучков, $R_i$ – частоты Раби соответствующие амплитудам поля $E_i$, которые в рассматриваемом случае равноинтенсивных встречных пучков $I_l = I_r$, могут быть выраженны через общую частоту Раби R, как $R_1 = R_3 = R$ и $R_2 = R_4 = s_0 \cdot R$, где $s_0 = d_{32}/d_{31}$.

Отметим, что в отличие от фазы $\tilde{\theta}$, возникающей в трёхуровневой модели, фаза $\theta_m$ описывает только пространственные осцилляции, в то время как угол $\alpha$ учитывается при вычислении тензорных произведений векторов $\boldsymbol{\xi}_i$. Таким образом, в этой главе продемонстрировано, что асимметрия резонансного контура определяется только фазовыми слагаемыми и не зависит от угла между осями эллипсов поляризации $\alpha$.

В **четвёртой главе** продемонстрированы результаты численного решения оптических уравнений Блоха для случая взаимодействия эллиптически поляризованного бихроматического лазерного излучения со средой многоуровневых атомов, аналитическому рассмотрению которого посвящена глава 3. В области, для которой справедлива теория возмущений, аналитические результаты полностью согласуются с результатами численных расчётов (рисунок 5). Найденные аналитические решения получены в приближении слабых полей и ожидаемо

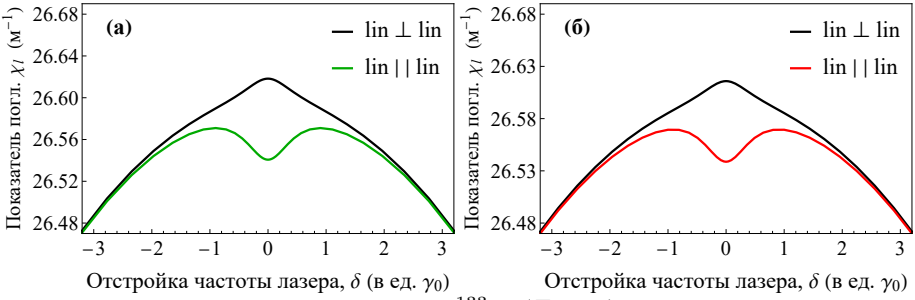


Рис. 5 — Показатель поглощения атомов $^{133}$Cs ($F_3 = 4$), вычисленный в пределах теории возмущений ($R = 0.02\gamma_0$, $\gamma_{eg}\tau S \ll 1$), где (а) аналитические значения, (б) численные значения

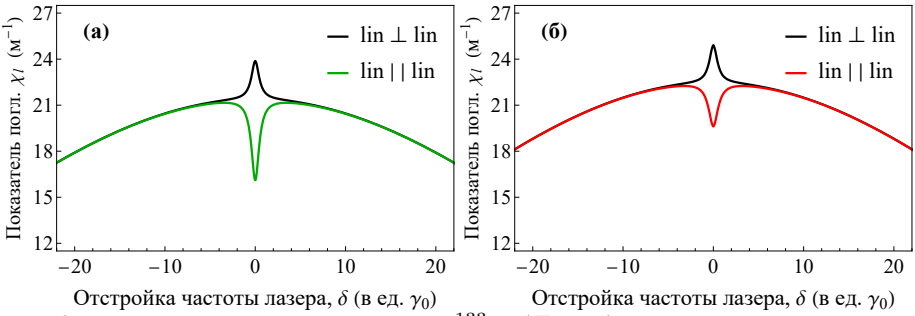


Рис. 6 — Показатель поглощения атомов $^{133}$Cs ($F_3 = 4$), вычисленный на границе теории возмущений ($R = 0.2\gamma_0$, $\gamma_{eg}\tau S \sim 1$), где (а) аналитические значения, (б) численные значения

начинают расходиться при значениях интенсивностей, превышающих рамки теории возмущений (рисунок 6). Результаты численных расчётов используются в качестве связующего звена между аналитическими результатами, полученными в приближении слабых полей, и результатами экспериментов соответствующих случаю сильных полей.

В 4 главе численно продемонстрировано преимущество скрещенных циркулярных поляризаций ($\sigma^+\sigma^-$) в сравнении со скрещенными линейными (lin $\perp$ lin) при сравнении по величине параметра качества резонанса. Поскольку для разработки стандарта частоты важным параметром является отношение амплитуды резонанса к его ширине и уровню шума, то удобно ввести параметр характеризующий качество исследуемого резонанса. Определим параметр контраста (рисунок 1а) как: $Q_1 = A/(A + B)$. Полученные в данном разделе численные расчёты (рисунок 7а) подтверждают выводы сделанные на основе аналитических результатов, о том, что использование циркулярных поляризаций обеспечивает лучшее значение параметра контраста в сравнении с линейными поляризациями. Таким образом, здесь продемонстрировано преимущество

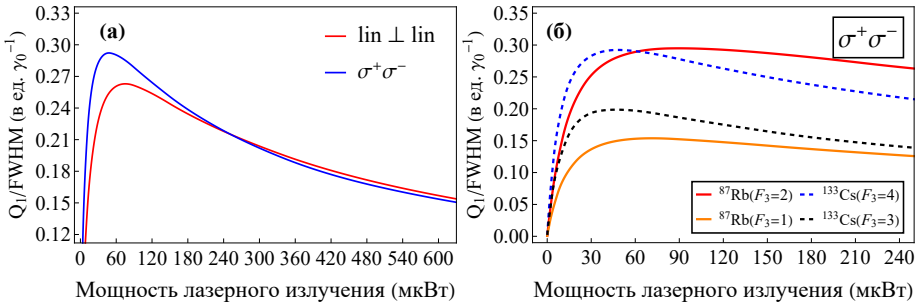


Рис. 7 — Значения параметра качества $Q_1/\,\mathrm{FWHM}$ для (а) линейной и циркулярной поляризаций встречных лазерных пучков для $D_1$ линии атомов $^{133}$Cs ($F_3 = 4$), (б) циркулярной поляризации встречных пучков для переходов $D_1$ линии атомов $^{133}$Cs и $^{87}$Rb

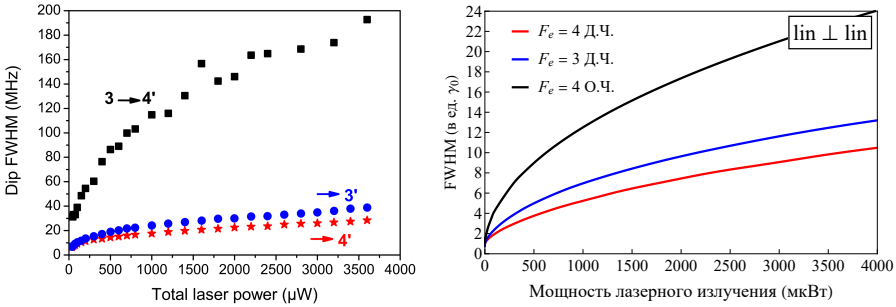


Рис. 8 — На левом рисунке с экспериментальными данными используются следующие обозначения: квадраты — одночастотный режим (О.Ч. для перехода в $F_e = 4$), круги и звёзды — двухчастотный режим (Д.Ч.для переходов в $F_e = 3$ и $F_e = 4$ соответственно), на правом рисунке представлены результаты численных расчётов

использования циркулярных поляризаций в сравнении с линейными для разработки стандарта частоты на основе СДР.

В конце 4 главы обсуждаются результаты численного моделирования и проводится сравнение резонансов, соответствующих различным переходам для $D_1$ линий цезия $^{133}$Cs и рубидия $^{87}$Rb. Здесь рассматриваются переходы на различные уровни сверхтонкого расщепления возбуждённого состояния, а так же влияние поляризации света и интенсивности (через квадрат частоты Раби) на параметры качества резонансов, их ширину на полувысоте (FWHM) и отношение амплитуды к ширине. В результате обнаружено (рисунок 7б), что наибольшие параметры качества наблюдаются для переходов на верхние уровни сверхтонкого расщепления возбуждённого состояния ($F_3 = 4$ для $^{133}$Cs и $F_3 = 2$ для

$^{87}$Rb), а так же, что рубидий предпочтительнее цезия для максимизации параметра $Q_1/\,\mathrm{FWHM}$. Здесь выполняется сравнение результатов численных расчётов с экспериментами. На рисунке 8 представлен пример одного из таких сравнений. На качественном уровне заметно хорошее соответствие результатам экспериментов.

**Заключение** содержит описание полученных результатов и их обсуждение, а также приводятся возможные пути дальнейшего развития исследований.

В данной работе была разработана аналитическая теория взаимодействия встречных бихроматических лазерных пучков с газом атомов щелочных металлов, нацеленная, главным образом, на объяснение механизмов формирования высококонтрастных субдоплеровских резонансов и выделение парциальных вкладов в общий резонансный контур от различных оптических линейных и нелинейных эффектов. Разработанная теоретическая модель ориентирована на изотопы рубидия $^{87}$Rb и цезия $^{133}$Cs, в которых спектрально разрешены сверхтонкие структуры возбужденных состояний, поскольку именно эти изотопы используются в практической реализации миниатюрных оптических стандартов частоты.

Теория возмущений, использованная для получения аналитических результатов, имеет свои очевидные ограничения. Кроме того, наиболее высокий контраст субдоплеровских резонансов в экспериментах наблюдался в режимах, которые выходили за качественные рамки теории возмущений. Поэтому для получения результатов за пределами теории возмущений были выполнены численные расчёты. Это позволило, с одной стороны, проверить справедливость полученных аналитических выражений, а с другой – обосновать теоретически возможность наблюдения высококонтрастных субдоплеровских резонансов. Помимо этого, численные расчёты подтвердили аналитические предсказания о том, что использование ортогональных циркулярных поляризаций встречных световых пучков позволяет несколько улучшить отношение контраст/ширина наблюдаемых резонансов. Также численные расчёты продемонстрировали более сильную асимметрию нелинейного резонанса при наблюдении за пробным пучком в режиме, когда теория возмущений не применима. Некоторые результаты численных расчётов были сопоставлены с имеющимися на текущий момент результатами экспериментов.

Помимо развития теории субдоплеровской спектроскопии, результаты проделанной работы имеют ясный практический интерес, связанный с разработкой миниатюрного оптического стандарта частоты. Рассмотренная двухчастотная субдоплеровская спектроскопия является одним из трёх методов нелинейной спектроскопии, которая в настоящее время используется для этой цели. В частности, проведённый теоретический анализ показывает, что циркулярно поляризованные пучки могут быть перспективнее с точки зрения достижения наилучшего отношения контраст/ширина. Однако, подавляющее большинство экспериментальных и теоретических работ на эту тему ограничивалось линейно поляризованными пучками, без детального исследования

конфигурации с циркулярно поляризованными. Кроме того, теоретически было показано, что схема наблюдения, в которой нелинейный резонанс наблюдается в поглощении обоих встречных пучков (например, при прохождении лазерного пучка газовой ячейки сначала в одну, а затем в другую сторону), является более подходящей для приложений к оптическим стандартам частоты. Это связано с тем, что резонанс в такой схеме не обладает дополнительной асимметрией формы линии (такая асимметрия могла бы ухудшить долговременную стабильность частоты).

Практический интерес также представляет проведённое сравнение параметров нелинейных резонансов для $D_1$-линии в атомах $^{133}$Cs и $^{87}$Rb, что выявило незначительное преимущество последних в плане отношения контраст/ширина. Разумеется, этот вывод не означает окончательного заключения о том, что атомы рубидия лучше атомов цезия, поскольку выбор конкретного химического элемента для оптического стандарта частоты – задача многофакторная. Например, атомы цезия при той же температуре, что и атомы рубидия, позволяют добиться более высокой концентрации паров в ячейке, что потенциально может сделать атомы цезия предпочтительнее. Кроме того, ячейки с атомами цезия, как правило, значительно дешевле, поскольку не требуют существенных затрат на изотопическое обогащение природной смеси, как в случае с атомами $^{87}$Rb.

В качестве дальнейшего развития работы можно включить в поставленную задачу влияние внешнего магнитного поля произвольного направления, что, в частности, позволит определить требуемую степень магнитной экранировки газовой ячейки. Более того, решение этой задачи способствует развитию атомной магнитометрии. Также представляет теоретический и экспериментальный интерес развитие теории на другие атомы щелочных металлов (Li, K, Na), а также на спектральную линию $D_2$. В этих случаях сверхтонкое расщепление в возбуждённом состоянии атома либо частично, либо полностью не разрешается (в случае с атомом Li оно также не разрешается и для основного состояния). Наконец, полученные выражения могут быть проанализированы не с точки зрения субдоплеровской спектроскопии насыщения, а с точки зрения спектроскопии резонансов КПН. Действительно, в рассмотренной задаче для наблюдения нелинейных резонансов предполагается сканирования оптической отстройки частоты, а рамановская (двухфотонная) частотная отстройка входит в качестве параметра. Однако задачу можно поставить обратным образом и исследовать нелинейный отклик среды на сканирование именно рамановской отстройки, что может принести новые знания о резонансах КПН в поле встречных двухчастотных лазерных пучков в газе атомов без буферного газа.

## Публикации автора по теме диссертации

### В изданиях из списка ВАК РФ


A1. *Mikhailov*, *A. M.* Theory of sub-Doppler spectroscopy of alkali-metal vapors in counterpropagating bichromatic laser beams: Pump-probe regime / A. M. Mikhailov, D. V. Brazhnikov // JETP. — 2026. — Vol. 143, no. 3.

A2. *Михайлов*, *А. М.* Форма линии субдоплеровских резонансов в газе атомов щелочных металлов в поле встречных бихроматических лазерных пучков / А. М. Михайлов, Р. Будо, Д. В. Бражников // ЖЭТФ. — 2021. — Т. 60, № 1. — С. 818.

A3. Nonlinear enhanced-absorption resonances in compact alkali-vapor cells for applications in quantum metrology / D. V. Brazhnikov, S. M. Ignatovich, I. S. Mesenzova, A. M. Mikhailov, M. N. Skvortsov, A. N. Goncharov, V. M. Entin, I. I. Ryabtsev, R. Boudot, E. Taskova, E. Alipieva, C. Andreeva, S. Gateva // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1859, no. 1. — P. 012019.

A4. Двухчастотная субдоплеровская спектроскопия $D_1$-линии атомов цезия в различных конфигурациях встречных лазерных пучков / Д. В. Бражников, С. М. Игнатович, И. С. Месензова, А. М. Михайлов, Р. Боудо, М. Н. Скворцов // Квантовая электроника. — 2020. — Т. 50, № 11. — С. 1015—1022.


### В сборниках трудов конференций


A5. *Михайлов*, *А. М.* Теория нелинейных высококонтрастных резонансов в парах цезия под действием встречных бихроматических лазерных пучков / А. М. Михайлов, Д. В. Бражников // 62-я Международная научная студенческая конференция «МНСК-2024». — 2024.

A6. На пути создания нового поколения миниатюрных квантовых стандартов частоты микроволнового и оптического диапазонов / А. М. Михайлов, Д. В. Бражников, С. М. Игнатович, И. С. Месензова, В. И. Вишняков, М. Н. Скворцов // 10-я научная конференция «ЭКБ и микроэлектронные модули». — 2024.

A7. *Михайлов*, *А. М.* Высококонтрастные субдоплеровские резонансы в парах атомов цезия в поле встречных бихроматических лазерных пучков / А. М. Михайлов, Д. В. Бражников // 7-я Международная школа-конференция молодых учёных «Нелинейная фотоника». — 2023.

A8. *Михайлов*, *А. М.* Высококонтрастные субдоплеровские резонансы в парах атомов цезия в поле встречных бихроматических лазерных пучков / А. М. Михайлов, Д. В. Бражников // Всероссийская научная конференция с международным участием «Невская фотоника-2023». — 2023.

A9. Towards a Miniature Optical Frequency Standard: Current Status and New Approaches in Sub-Doppler Spectroscopy of Cs Vapors / I. S. Mesenzova, S. M. Ignatovich, A. M. Mikhailov, R. Boudot, D. V. Brazhnikov // International Conference “Laser Physics-2021”. — 2021.

A10. *Михайлов*, *А. М.* Высококонтрастные нелинейные резонансы в атомах цезия в поле встречных бихроматических волн / А. М. Михайлов, Д. В. Бражников, С. М. Н. // Всероссийская научная конференция с международным участием «Енисейская фотоника-2022». — 2022.

A11. Сравнение различных методов субдоплеровской спектроскопии атомов щелочных металлов для создания миниатюрного оптического стандарта частоты / А. М. Михайлов, И. С. Месензова, С. М. Игнатович, Д. В. Бражников, Р. Боудо // XII Международная конференция «Фундаментальные проблемы оптики-2020». — 2020. — С. 32—33.

## Список литературы


1. *Letokhov*, *V. S.* Nonlinear laser spectroscopy. Vol. 4 / V. S. Letokhov, V. P. Chebotayev. — Springer, 1977.
2. *Rautian*, *S. G.* Kinetic problems of non-linear spectroscopy / S. G. Rautian, A. M. Shalagin. — 1991.
3. *Riehle*, *F.* Frequency standards: basics and applications / F. Riehle. — John Wiley & Sons, 2006.
4. Composite laser-pulses spectroscopy for high-accuracy optical clocks: a review of recent progress and perspectives / W. Zanon [et al.] // Reports on Progress in Physics. — 2018. — Vol. 81, no. 9. — P. 094401.
5. *Alexandrov*, *E. B.* Recent Progress in Optically Pumped Magnetometers / E. B. Alexandrov // Physica Scripta. — 2003. — Vol. T105. — P. 27.
6. Optical Magnetometry / ed. by D. Budker, D. F. Jackson Kimball. — Cambridge : Cambridge University Press, 2013.
7. High-accuracy inertial measurements with cold-atom sensors / R. Geiger [et al.] // AVS Quantum Science. — 2020. — Vol. 2, no. 2.
8. Saturated-Absorption Cavity Ring-Down Spectroscopy / G. Giusfredi [et al.] // Physical Review Letters. — 2010. — Vol. 104, no. 11. — P. 110801.
9. *Haroche*, *S.* Theory of saturated-absorption line shapes / S. Haroche, F. Hartmann // Physical Review A. — 1972. — Vol. 6, no. 4. — P. 1280.
10. *Shirley*, *J. H.* Semiclassical Theory of Saturated Absorption in Gases / J. H. Shirley // Phys. Rev. A. — 1973. — Vol. 8, issue 1. — P. 347—368.
11. *Багаев*, *С. Н.* Лазерные стандарты частоты / С. Н. Багаев, В. П. Чеботаев // Успехи физических наук. — 1986. — Т. 148, № 1. — С. 143—178.

12. *Бакланов*, *Е. В.* Оптические стандарты частоты и фемтосекундные лазеры / Е. В. Бакланов, П. В. Покасов // Квантовая электроника. — 2003. — Т. 33, № 5. — С. 383—400.

13. Sub-nanosecond ground-to-space clock synchronization for nanosatellites using pulsed optical links / J. Anderson [et al.] // Advances in Space Research. — 2018. — Vol. 62, no. 12. — P. 3475—3490.

14. $\mu$POP clock: A microcell atomic clock based on a double-resonance Ramsey scheme / E. Batori [et al.] // Physical Review Applied. — 2022. — Vol. 18, no. 5. — P. 054039.

15. *Vanier*, *J.* Atomic clocks based on coherent population trapping: a review / J. Vanier // Applied Physics B. — 2005. — Vol. 81. — P. 421—442.

16. *Kitching*, *J.* Chip-scale atomic devices / J. Kitching // Applied Physics Reviews. — 2018. — Vol. 5, no. 3.

17. ULPAC: A miniaturized ultralow-power atomic clock / H. Zhang [et al.] // IEEE Journal of Solid-State Circuits. — 2019. — Vol. 54, no. 11. — P. 3135—3148.

18. Миниатюрный квантовый стандарт частоты на основе явления когерентного пленения населённостей в парах атомов $^{87}$Rb / М. Н. Скворцов [и др.] // Квантовая электроника. — 2020. — Т. 50, № 6. — С. 576—580.

19. Sub-Doppler spectroscopy of the Cs atom $6S_{1/2}$–$7P_{1/2}$ transition at 459 nm in a microfabricated vapor cell / E. Klinger [et al.] // Optics Letters. — 2024. — Vol. 49, no. 8. — P. 1953—1956.

20. Miniaturized optical frequency reference for next-generation portable optical clocks / V. Maurice [et al.] // Optics Express. — 2020. — Vol. 28, no. 17. — P. 24708—24720.

21. Architecture for the photonic integration of an optical atomic clock / Z. L. Newman [et al.] // Optica. — 2019. — Vol. 6, no. 5. — P. 680—685.

22. Doppler-free spectroscopy on the Cs $D_1$ line with a dual-frequency laser / M. A. Hafiz [et al.] // Optics letters. — 2016. — Vol. 41, no. 13. — P. 2982—2985.

23. Двухчастотная внутридоплеровская спектроскопия атомов $^{87}$Rb / В. Л. Величанский [и др.] // Письма в ЖЭТФ. — 2025. — Т. 121, № 8. — С. 633—638.

24. Saturation Spectroscopy with Laser Optical Pumping in Atomic Barium / P. G. Pappas [et al.] // Physical Review A. — 1980. — Vol. 21, no. 6. — P. 1955—1968.

25. Cesium Saturation Spectroscopy Revisited: How to Reverse Peaks and Observe Narrow Resonances / O. Schmidt [et al.] // Applied Physics B Lasers and Optics. — 1994. — Vol. 59, no. 2. — P. 167—178. — (Visited on 03/15/2026).

26. Doppler-Free Spectroscopy of the $D_1$ Line of Potassium / D. Bloch [et al.] // Laser Physics. — 1996. — Vol. 6. — P. 670—678.

27. *Saprykin*, *E. G.* Numerical Studies of the Saturated Absorption Resonances in a Nonlinear Spectroscopy of the Degenerate Atomic Transitions / E. G. Saprykin, A. A. Chernenko // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1730, no. 1. — P. 012108.

28. High-contrast sub-Doppler absorption spikes in a hot atomic vapor cell exposed to a dual-frequency laser field / M. A. Hafiz [et al.] // New Journal of Physics. — 2017. — Vol. 19, no. 7. — P. 073028.

29. Dual-frequency sub-Doppler spectroscopy: Extended theoretical model and microcell-based experiments / D. Brazhnikov [et al.] // Physical Review A. — 2019. — Vol. 99, no. 6. — P. 062508.

30. Atomic-Motion-Induced Spectroscopic Effects That Are Nonlinear in Atomic Density in a Gas / V. I. Yudin [et al.] // Journal of the Optical Society of America B. — 2022. — Vol. 39, no. 7. — P. 1979.

31. *Voloshin*, *G.* Line Shape and Light Shift of Coherent Population Trapping Resonance under Ramsey Interrogation in 'Hot' Atoms in an Optically Dense Medium / G. Voloshin, K. Barantsev, A. Litvinov // Quantum Electronics. — 2022. — Vol. 52, no. 2. — P. 108—115.

32. *Castin*, *Y.* Maxwell-Bloch Equations: A Unified View of Nonlinear Optics and Nonlinear Atom Optics / Y. Castin, K. Mo/lmer // Physical Review A. — 1995. — Vol. 51, no. 5. — R3426—R3428.

33. *Юдин*, *В. И.* Теория светоиндуцированной анизотропии резонансных атомов в стационарных эллиптически поляризованных полях: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.05 / В. И. Юдин. — Новосибирск, 2000. — 128 с.

34. *Varshalovich*, *D. A.* Quantum theory of angular momentum / D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, V. K. Khersonskii. — World Scientific, 1988.